BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN NHƯ QUÂN

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÀ BAO HÀM THỨC VI PHÂN PHÂN THỨ CHỨA TRỄ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN NHƯ QUÂN

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÀ BAO HÀM THỨC VI PHÂN PHÂN THỨ CHỨA TRỄ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. Trần Đình Kế
TS. Nguyễn Thành Anh

Hà Nội - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Trần Đình Kế và TS. Nguyễn Thành Anh. Các kết quả được phát biểu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Như Quân

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành tại Bộ môn Giải tích Khoa Toán-Tin, trường Đại học sư phạm Hà Nội, dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo, đầy trách nhiệm của PGS.TS. Trần Đình Kế và TS. Nguyễn Thành Anh.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy Trần Đình Kế và cảm thấy rất may mắn và vinh dự khi nhận được sự dìu dắt, hướng dẫn của thầy trên con đường nghiên cứu khoa học.

Tác giả cũng xin được gửi lời cám ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Thành Anh, thầy là người đã giới thiệu, động viên tác giả những ngày đầu và trong suốt quá trình làm nghiên cứu sinh.

Tác giả xin trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là các thầy cô giáo trong Bộ môn Giải tích đã luôn giúp đỡ, động viên, tạo môi trường học tập nghiên cứu thuận lợi cho tác giả.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Ban Giám hiệu trường Đại học Điện lực, các anh chị đồng nghiệp công tác tại Bộ môn Toán, Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Điện lực đã luôn tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin dành cho gia đình, những người luôn yêu thương, chia sẻ, động viên tác giả vượt qua khó khăn để hoàn thành luận án.

Tác giả

Mục lục

Lời cam đoan 1

Lời cảm ơn 2

Mục lục 3

MỞ ĐẦU 6

Chương 1. **KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 15**

1.1. GIẢI TÍCH PHÂN THỨ 15

1.1.1. Đạo hàm và tích phân phân thứ 15

1.1.2. Đạo hàm và tích phân phân thứ có trọng 17

1.2. LÍ THUYẾT GIẢI THỨC 18

1.3. ĐỘ ĐO KHÔNG COMPACT VÀ CÁC ƯỚC LƯỢNG . . . 23

1.4. ÁNH XẠ NÉN VÀ CÁC ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG . . . 25

1.4.1. Một số vấn đề về giải tích đa trị 25

1.4.2. Ánh xạ nén và một số định lí điểm bất động 27

1.5. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC HỆ VI PHÂN 27

1.5.1. Ổn định Lyapunov 27

1.5.2. Ổn định thời gian hữu hạn và tính hút trong thời gian hữu hạn 29

1.6. MỘT SỐ KẾT QUẢ BỔ TRỢ 31

1.6.1. Các không gian hàm 31

1.6.2. Một số bất đẳng thức thường dùng 34

Chương 2. **TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TÁN XẠ-SÓNG NỬA TUYẾN TÍNH CHỨA XUNG VÀ TRỄ HỮU**

HẠN **36**

2.1. ĐẶT BÀI TOÁN 36

2.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TÍCH PHÂN 36

2.3. TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM 43

2.4. ÁP DỤNG 47

Chương 3. **TÍNH ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN YẾU CỦA NGHIỆM BAO HÀM THỨC VI PHÂN DẠNG TÁN XẠ-SÓNG VỚI TRỄ VÔ HẠN** **50**

3.1. ĐẶT BÀI TOÁN 50

3.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM BỊ CHẶN MŨ 50

3.3. KẾT QUẢ VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN YẾU 59

3.4. ÁP DỤNG 62

Chương 4. **TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHÂN THỨ CÓ TRỌNG** **67**

4.1. ĐẶT BÀI TOÁN 67

4.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM 67

4.3. TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN 74

4.4. ÁP DỤNG 80

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN 84

TÀI LIỆU THAM KHẢO **85**

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập hợp các số thực dương
$(E, \|\cdot\|_E)$	không gian Banach với chuẩn trong E
2^E	họ các tập con của E
$\mathcal{P}(E)$	$= \{A \in 2^E : A \neq \emptyset\}$,
$\mathcal{P}_b(E)$	$= \{A \in \mathcal{P}(E) : A$ là tập bị chặn$\}$
$\mathcal{P}_c(E)$	$= \{A \in \mathcal{P}(E) : A$ là tập đóng$\}$
$\mathcal{K}v(E)$	$= \{A \in \mathcal{P}(E) : A$ là tập lồi và compact$\}$
$\mathcal{L}(E)$	không gian các toán tử tuyến tính, bị chặn trên không gian Banach E
$\mathcal{C}_h$	$= C([-h, 0]; E)$
χ_h	độ đo không compact trong không gian $\mathcal{C}_h$
$B_E[a, r]$	$= \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}$
$I_0^\alpha f(t)$	tích phân phân thứ Riemann-Liouville bậc $\alpha > 0$ của hàm f
$D_0^\alpha f(t)$	đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville bậc $\alpha > 0$ của hàm f
${}^C D_0^\alpha f(t)$	đạo hàm phân thứ Caputo bậc $\alpha > 0$ của hàm f
$I_0^{\alpha,\sigma} f(t)$	tích phân phân thứ Riemann-Liouville có trọng với bậc $\alpha > 0$ của hàm f
${}^C D_0^{\alpha,\sigma} f(t)$	đạo hàm phân thứ có trọng theo nghĩa Caputo với bậc $\alpha > 0$ của hàm f
I	ánh xạ đồng nhất
$\to$	hội tụ mạnh
$\rightharpoonup$	hội tụ yếu

MỞ ĐẦU

1. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU VÀ LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Giải tích phân thứ bắt nguồn từ câu hỏi đưa ra vào năm 1695 bởi L´Hospital và Leibniz. Đó là làm thế nào để khái quát hóa các khái niệm của giải tích bậc nguyên cho trường hợp có bậc bất kỳ? Như thường gọi, giải tích phân thứ là thuật ngữ dùng để chỉ đạo hàm và tích phân phân thứ. Qua lịch sử hơn ba thế kỷ hình thành và phát triển, trong một thời gian dài giải tích phân thứ chủ yếu thu hút sự quan tâm của các nhà toán học, do chưa biết nhiều đến các ứng dụng của nó trong các mô hình thực tiễn và các lĩnh vực khoa học khác. Trong những thập kỷ gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã dành sự quan tâm cho giải tích phân thứ khi thấy rằng đạo hàm và tích phân phân thứ là công cụ có thể mô tả tốt hơn nhiều hiện tượng trong thế giới tự nhiên và trong kỹ thuật như: hệ nhớt đàn hồi, sự phân cực chất điện môi, sóng điện từ, sự truyền nhiệt, kỹ thuật chế tạo người máy, hệ sinh học, tài chính và một số lĩnh vực khác [4, 10, 37, 43]. Trong lịch sử, giải tích phân thứ đã thu hút được sự chú ý của nhiều nhà toán học tiên phong như Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Laurant, Hardy, và Riesz...[44, 57, 59, 68]. Các ứng dụng của giải tích phân thứ trong vật lí đầu tiên được thực hiện bởi Abel và Heaviside [44, 68]. Ngày nay, phương trình vi phân phân thứ có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học. Đối với một số ứng dụng thực tế việc sử dụng phương trình vi phân phân thứ mang lại hiệu quả tốt hơn so với phương trình vi phân cổ điển.

Lí thuyết định tính và ứng dụng của phương trình vi phân phân thứ trong vật lí, kỹ thuật, kinh tế, sinh học và sinh thái học được nghiên cứu rộng rãi, có thể tìm thấy trong các công trình [44, 51, 52, 57, 68] và các trích dẫn trong đó. Khi xem xét các mô hình thực tiễn, đặc biệt trong các bài toán điều khiển thì trễ là một nhân tố không thể tách rời. Do đó, các hệ có trễ thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học, ở đó việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm là một trong những bài toán quan trọng và hấp dẫn nhất.

Trong nhiều mô hình ứng dụng [51], người ta sử dụng phương trình vi

phân đạo hàm riêng phân thứ dạng

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = \Delta u(t,x), t > 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

với bậc đạo hàm $\alpha \in (0,2]$, Δ là toán tử Laplace. Trường hợp $\alpha \in (0,1)$, nó là phương trình dưới khuếch tán, được ứng dụng trong vật lí bởi Nigmatullin [58] để mô tả quá trình khuếch tán trong môi trường vật liệu fractal (một dạng đặc biệt của vật liệu xốp). Trường hợp $\alpha \in (1,2)$, nó là phương trình sóng phân thứ, mô tả sự lan truyền của sóng cơ trong vật liệu nhớt đàn hồi.

Lí thuyết cơ sở về phương trình vi phân phân thứ đã được phát triển và trình bày trong nhiều tài liệu, có thể kể đến các cuốn sách tiêu biểu [43, 57, 65]. Những kết quả gần đây về phương trình vi phân phân thứ chủ yếu dành cho tính giải được trong khoảng thời gian hữu hạn [63, 72, 74] và tính điều khiển được (chính xác hoặc xấp xỉ) [42, 45, 66, 73, 74]. Trong khi lí thuyết ổn định cho phương trình vi phân bậc nguyên có lịch sử phát triển lâu dài và đạt được nhiều kết quả quan trọng [22, 23, 32] thì các kết quả về tính ổn định đối với các phương trình vi phân phân thứ còn ít được biết đến. Trên thực tế, việc sử dụng các công cụ cổ điển như phương pháp hàm Lyapunov cho các phương trình vi phân phân thứ gặp nhiều khó khăn do việc tính đạo hàm phân thứ của các phiếm hàm Lyapunov rất khó thực hiện.

Quay lại phương trình (1) trong trường hợp $\alpha \in (1,2)$, một dạng tương tự của nó được xem xét là

$$\partial_t u(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \Delta u(s,x) ds,\ t > 0,\ x \in \Omega. \tag{2}$$

Phương trình này được gọi là phương trình tán xạ-sóng (một dạng trung gian giữa phương trình khuếch tán ($\alpha = 1$) và phương trình sóng ($\alpha = 2$)), được Fujita nghiên cứu lần đầu trong các công trình [25, 26]. Phương trình với nhiễu phi tuyến tương ứng dạng

$$\partial_t u(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \Delta u(s,x) ds + f(t,x,u(t,x)),\ t > 0,\ x \in \Omega, \tag{3}$$

mô tả quá trình khuếch tán kỳ dị và sự truyền sóng trong vật liệu nhớt đàn hồi, được nghiên cứu trong [37, 50, 53, 54]. Để nghiên cứu lớp phương trình này, ta thường chuyển nó về phương trình vi phân trong không gian Banach. Cụ thể, ta có thể coi $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$ là hàm theo biến t nhận giá trị trong $L^2(\Omega)$ xác định bởi $u(t) = u(t,\cdot)$. Khi đó, phương trình (3)

có thể viết dưới dạng phương trình vi phân trừu tượng

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u(t)), \tag{4}$$

trong đó $A = \Delta$ với miền xác định phù hợp theo điều kiện biên và $f(t, u(t)) = f(t, \cdot, u(t, \cdot))$. Gần đây, vấn đề nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm đối với lớp phương trình này nhận được sự quan tâm của một số nhà nghiên cứu [1, 15, 16, 17], tuy nhiên kết quả đạt được còn hạn chế. Theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có kết quả nào về tính ổn định nghiệm của phương trình dạng (4) được công bố. Chính vì vậy chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm đối với bài toán tổng quát sau trong không gian Banach X:

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u(t), u_t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{5}$$

$$u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), k \in \Lambda, \tag{6}$$

$$u(\bar{s}) + g(u)(\bar{s}) = \varphi(\bar{s}), \bar{s} \in [-h, 0], \tag{7}$$

ở đây A là toán tử tuyến tính, đóng và không bị chặn, f là hàm phi tuyến xác định trên $\mathbb{R}^+ \times X \times \mathcal{C}_h$, hàm không cục bộ $g : \mathcal{PC}([-h, T]; X) \to \mathcal{C}_h$ và hàm xung $I_k : X \to X, k \in \Lambda$ với $\Lambda \subset \mathbb{N}$ là một tập chỉ số. Kí hiệu $u(t_k^+)$, $u(t_k^-)$ tương ứng là các giới hạn phải và trái của u tại t_k; u_t là quá khứ của hàm trạng thái tính tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(\bar{s}) = u(t + \bar{s}), \bar{s} \in [-h, 0]$. Trong trường hợp hệ này không chứa trễ, không có hiệu ứng xung ($I_k = 0$) và điều kiện ban đầu cục bộ ($g = 0$), ta có bài toán Cauchy cổ điển ứng với phương trình (4).

Bài toán Cauchy với điều kiện không cục bộ hay điều kiện xung đã nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu trong những năm gần đây. Điều kiện không cục bộ dạng (7) cho ta mô tả tốt hơn các mô hình thực tế so với điều kiện ban đầu cổ điển, ví dụ như điều kiện

$$u(s) + \sum_{i=1}^{M} c_i u(\tau_i + s) = \varphi(s)$$

cho phép mô tả những đo đạc bổ sung tại một số thời điểm thay vì chỉ đo tại thời điểm ban đầu. Ý nghĩa vật lí và những kết quả nghiên cứu đầu tiên về bài toán không cục bộ đã được Byszewski trình bày trong [12]. Sau đó, các bài toán khác nhau với điều kiện không cục bộ liên quan đến các phương trình vi phân bậc nguyên, và các bao hàm thức vi phân bậc nguyên nhận được sự quan tâm rất lớn của các nhà nghiên cứu. Liên quan đến các kết

quả về tính giải được, chúng tôi trích dẫn các công trình [14, 35, 39, 41, 48]. Mặt khác, điều kiện xung dạng (6) thường được sử dụng để mô tả các hệ động lực có trạng thái thay đổi đột ngột. Về lí thuyết các hệ vi phân chứa xung, có thể tham khảo tài liệu [46]. Rõ ràng, bài toán Cauchy tổng quát với điều kiện không cục bộ và hiệu ứng xung đóng một vai trò quan trọng trong việc mô tả nhiều bài toán thực tế.

Cần nói thêm rằng, khi khảo sát các kết quả liên quan đến phương trình vi tích phân dạng (5), có thể tìm thấy các công trình nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tuần hoàn tiệm cận trong [1, 15, 16]. Ngoài ra, các tác giả trong [17] đã chỉ ra sự tồn tại của nghiệm hầu tự đẳng cấu tiệm cận (asymptotically almost automorphic solutions).

Dựa trên nguyên lí điểm bất động, chúng tôi chứng minh nghiệm *không* của bài toán (5)-(7) có tính hút toàn cục, nghĩa là $u(t) \to 0$ khi $t \to +\infty$ với mọi dữ kiện ban đầu bị chặn φ. Lưu ý rằng, nếu một nghiệm của (5)-(7) có tính tiêu hao thì nó cũng ω-tuần hoàn S-tiệm cận [1, 15, 16].

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng lớp phương trình (4) cho trường hợp phần phi tuyến là hàm đa trị với trễ vô hạn

$$u'(t) \in \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + F(t, u_t), t > 0, \tag{8}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{9}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính đóng và không bị chặn, F là một ánh xạ đa trị xác định trên $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ là không gian pha định nghĩa trong Chương 1. Ở đây $\alpha \in (1, 2)$ và u_t là quá khứ của hàm trạng thái cho tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(s) = u(t + s), s \leq 0$.

Trong bài toán này, hàm phi tuyến F sinh ra từ hệ điều khiển với phản hồi đa trị [40], và nhiều bài toán khác như bài toán chính quy hóa phương trình vi phân với vế phải không liên tục [27], hoặc từ bài toán liên quan đến bất đẳng thức vi biến phân [60]. Trễ vô hạn thường xuất hiện trong các bài toán điều khiển, khi nhân tố điều khiển lấy thông tin từ quá khứ của hệ nhưng không có thông tin về thời điểm bắt đầu xuất hiện trễ. Mục đích chính của chúng tôi khi nghiên cứu bài toán này là phân tích tính *ổn định tiệm cận yếu* của nghiệm *không* dựa trên khái niệm được trình bày sau đây:

Kí hiệu $\Sigma(\varphi)$ là tập nghiệm của hệ (8)-(9) với điều kiện ban đầu φ. Giả sử rằng $0 \in \Sigma(0)$, tức là (8) có nghiệm *không*. Nghiệm *không* của (8) được gọi là *ổn định tiệm cận yếu* nếu

1. *Ổn định*, nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $|\varphi|_{\mathcal{B}} < \delta$ thì $|u_t|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$ với mọi $u \in \Sigma(\varphi), t > 0$;
2. *Hút yếu*, nghĩa là với mỗi $\varphi \in \mathcal{B}$, tồn tại $u \in \Sigma(\varphi)$ sao cho $|u_t|_{\mathcal{B}} \to 0$ khi $t \to +\infty$.

Chúng tôi đưa ra khái niệm này dựa trên khái niệm ổn định yếu của Filippov [27] cho hệ vi phân thường không chứa trễ. Rõ ràng khái niệm ổn định tiệm cận yếu phù hợp cho các hệ vi phân mà tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy không được đảm bảo, đặc biệt là các bao hàm thức vi phân.

Để chứng minh tính ổn định tiệm cận yếu, chúng tôi sử dụng nguyên lí điểm bất động cho ánh xạ nén trên không gian các hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}^+$. Cụ thể, dựa vào dáng điệu của α-giải thức $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi phần tuyến tính, chúng tôi xây dựng không gian nghiệm thích hợp, định nghĩa một độ đo không compact mới trên không gian nghiệm $C_g([0,+\infty); X)$ để xác định một tiêu chuẩn compact trên không gian này, sau đó chứng minh toán tử nghiệm có tính nén.

Với cách tiếp cận này, trong trường hợp α-giải thức có tăng trưởng mũ, chúng tôi chứng minh được rằng bài toán (8)-(9) có nghiệm bị chặn mũ. Tiếp theo, khi α-giải thức ổn định tiệm cận, chúng tôi chứng minh tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm *không*.

Mở rộng khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ [64, 68], giải tích phân thứ có trọng đã được phát triển để nghiên cứu một số bài toán liên quan đến vật liệu xốp [30], dòng chảy địa vật lí [55], thủy văn nước ngầm [56].v.v. Trong trường hợp này, thay vì xét phương trình (1), người ta xét phương trình

$$\partial_t^{\alpha,\sigma} u(t,x) = \Delta u(t,x), t > 0,\ x \in \Omega, \tag{10}$$

trong đó $\partial_t^{\alpha,\sigma}$ là đạo hàm phân thứ có trọng. Phương trình này với nhiễu phi tuyến trong không gian Banach có dạng

$${}^C D_0^{\alpha,\sigma} u(t) = Au(t) + f(t, u(t)),\ t > 0,$$

ở đó ${}^C D_0^{\alpha,\sigma}$ là đạo hàm phân thứ có trọng với bậc α theo nghĩa Caputo (xem Định nghĩa 1.5).

Có thể tìm hiểu thêm các mục tiêu và lí do mở rộng giải tích phân thứ trong [67]. Phương trình vi phân phân thứ có trọng là chủ đề được quan tâm trong hơn một thập kỉ qua, có thể kể đến một số kết quả về tính giải được, ở đó phương pháp giải số đã được thiết lập [13, 20, 49].

Với mục tiêu phân tích dáng điệu nghiệm của phương trình vi phân phân thứ có trọng, chúng tôi xét bài toán

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_0^{\alpha,\sigma}u(t) &= Au(t) + f(t, u_t),\ t \in [0, T], && (11)\\
u(s) &= \varphi(s), s \in [-h, 0], && (12)\\
u'(0) &= y, && (13)
\end{aligned}
$$

ở đây $\alpha \in (1, 2), \sigma > 0$, hàm trạng thái u nhận giá trị trong không gian Banach X với hàm trạng thái trễ $u_t \in C([-h, 0]; X)$ xác định bởi $u_t(s) = u(t + s), s \in [-h, 0]$, A là một toán tử tuyến tính đóng trên X và hàm phi tuyến f xác định trên $[0, T] \times C([-h, 0]; X)$.

Chú ý rằng, trong trường hợp $\sigma = 0$, ${}^{C}D_0^{\alpha,0} = {}^{C}D_0^{\alpha}$ chính là đạo hàm phân thứ theo nghĩa Caputo. Ngoài ra, theo khảo sát của chúng tôi, chưa có kết quả nghiên cứu định tính nào được công bố cho phương trình dạng (11). Ở đây, mục tiêu của chúng tôi là chứng minh tính giải được của bài toán (11)-(13) dưới các thiết lập tổng quát (không có điều kiện Lipschitz đối với f cũng như tính compact của nửa nhóm sinh bởi A, các tình huống này đã được thảo luận trong [47] đối với trường hợp $\sigma = 0$). Thêm nữa, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu nghiệm của (11) thông qua khái niệm tính hút trong thời gian hữu hạn được đưa ra trong [28]. Có thể thấy rằng, dáng điệu tiệm cận của nghiệm của các hệ vi phân khi thời gian đủ lớn đã được nghiên cứu qua hàng thế kỷ, thu được nhiều thành tựu có tính hệ thống và đóng một vai trò quan trọng trong nhiều bài toán thực tiễn. Tuy nhiên, trong nhiều ứng dụng khi hiện tượng chỉ xảy ra trong thời gian ngắn thì việc phân tích dáng điệu của nghiệm trong khoảng thời gian hữu hạn lại đóng vai trò quan trọng và đang thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học.

Trong nội dung này chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm bằng cách sử dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ nén, điều này yêu cầu hàm phi tuyến f phải thỏa mãn tính chính quy được thể hiện thông qua độ đo không compact Hausdorff. Chú ý rằng, trong thiết lập của chúng tôi, hàm f có thể tăng trưởng trên tuyến tính. Để đạt được kết quả về tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm, chúng tôi thực hiện một số ước lượng cục bộ (ước lượng với dữ kiện ban đầu nhỏ) và sử dụng bất đẳng thức Gronwall kì dị. Cuối cùng chúng tôi áp dụng kết quả trừu tượng cho một lớp phương trình đạo hàm riêng phân thứ có trọng theo biến thời gian.

2. MỤC ĐÍCH – ĐỐI TƯỢNG – PHẠM VI NGHIÊN CỨU

2.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu dáng điệu nghiệm của một số hệ vi phân phân thứ có trễ theo cách tiếp cận của lí thuyết ổn định.

Đầu tiên chúng tôi nghiên cứu tính ổn định của nghiệm đối với lớp phương trình vi tích phân phân thứ chứa xung với điều kiện không cục bộ và trễ hữu hạn. Sau đó, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường cho bao hàm thức vi tích phân phân thứ chứa trễ vô hạn. Cuối cùng luận án đạt được một số kết quả về tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn đối với phương trình sóng phân thứ có trọng, nửa tuyến tính với trễ hữu hạn và phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính.

2.2. Đối tượng nghiên cứu

Trong luận án này, tác giả xét ba lớp bài toán:

∗ **Lớp thứ nhất:** Phương trình vi tích phân phân thứ dạng tán xạ-sóng với trễ hữu hạn.

∗ **Lớp thứ hai:** Bao hàm thức vi tích phân phân thứ dạng tán xạ-sóng với trễ vô hạn.

∗ **Lớp thứ ba:** Phương trình sóng phân thứ có trọng nửa tuyến tính với trễ hữu hạn.

2.3. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận án được thể hiện thông qua các nội dung sau

∗ **Nội dung 1:** Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các phương trình và bao hàm thức vi phân phân thứ với trễ hữu hạn và vô hạn.

∗ **Nội dung 2:** Nghiên cứu tính ổn định tiệm cận của nghiệm tầm thường đối với lớp phương trình vi tích phân phân thứ chứa xung và điều kiện không cục bộ với trễ hữu hạn.

∗ **Nội dung 3:** Nghiên cứu tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường đối với bao hàm thức vi tích phân phân thứ dạng sóng khuếch tán với trễ vô hạn.

∗ **Nội dung 4:** Nghiên cứu tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm đối với phương trình vi phân phân thứ có trọng (tempered) với trễ hữu hạn.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Luận án sử dụng các công cụ của giải tích đa trị, lí thuyết nửa nhóm ([61]), giải tích phân thứ, lí thuyết điểm bất động, để thực hiện các nội dung nghiên cứu nêu trên. Ngoài ra đối với các nội dung cụ thể, chúng tôi sử dụng một số kỹ thuật tương ứng:

- Nghiên cứu tính giải được của các bài toán phi tuyến: Phương pháp ước lượng theo độ đo không compact [40].
- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm phân rã và tốc độ phân rã cũng như tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm: Sử dụng lí thuyết điểm bất động theo cách tiếp cận của Burton và Furumochi [7, 8], kỹ thuật về ước lượng độ đo không compact và các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén trình bày trong [2].
- Nghiên cứu tính hút trong thời gian hữu hạn dựa trên khái niệm được đưa ra bởi Giesl và Rasmussen trong [28].

4. CẤU TRÚC VÀ CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình và Tài liệu tham khảo, luận án được chia làm bốn chương:

- **Chương 1:** *Kiến thức chuẩn bị.* Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các kết quả về giải tích phân thứ, lí thuyết giải thức, lí thuyết độ đo không compact (MNC) và ánh xạ nén, một số kiến thức về giải tích đa trị.
- **Chương 2:** *Tính ổn định nghiệm của phương trình tán xạ-sóng nửa tuyến tính chứa xung và trễ hữu hạn.* Trong chương này, chúng tôi chứng minh tính ổn định của nghiệm cho một lớp phương trình vi tích phân phân thứ với trễ hữu hạn.
- **Chương 3:** *Tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm bao hàm thức vi phân dạng tán xạ-sóng với trễ vô hạn.* Trong chương này, chúng tôi

chứng minh tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm cho một lớp bao hàm thức vi tích phân phân thứ với trễ vô hạn.

- **Chương 4:** *Tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm phương trình sóng phân thứ có trọng.* Trong chương này, với phương trình vi phân phân thứ có trọng và trễ hữu hạn, chúng tôi chứng minh tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm khi phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính.

5. Ý NGHĨA CỦA CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN

Các kết quả thu được trong luận án góp phần làm phong phú thêm hướng nghiên cứu ổn định nghiệm cho các phương trình và bao hàm thức vi tích phân phân thứ có trễ trong trong không gian Banach tổng quát, có thể áp dụng cho nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cũng như các hệ vi phân thường có trễ.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trong 02 bài báo trên các tạp chí khoa học chuyên ngành (liệt kê ở mục "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án"), 01 bài báo đã hoàn thành ở dạng tiền ấn phẩm. Các nội dung chính trong luận án đã được báo cáo tại:

1. Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
2. Hội thảo cho Nghiên cứu sinh, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2018.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. GIẢI TÍCH PHÂN THỨ

1.1.1. Đạo hàm và tích phân phân thứ

Mục này gồm một số định nghĩa và tính chất của đạo hàm và tích phân phân thứ, chi tiết có thể xem trong cuốn chuyên khảo [43].

Cho $m \in \mathbb{N}^+$ và $J = (0;T), 1 \leq p < +\infty$. Không gian Sobolev có thể định nghĩa theo cách sau (xem [11]):

$$W^{m,p}(J;E) = \Big\{ f \mid \exists \varphi \in L^p(J;E) : f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi(t), t \in J \Big\}, \tag{1.1}$$

ở đây '$*$' là tích chập Laplace xác định bởi

$$(k * \ell)(t) = \int_0^t k(t-s)\ell(s)ds, t \in \mathbb{R}_+, k \in L^1(\mathbb{R}_+), \ell \in L^1(\mathbb{R}_+;E);$$

và $c_k = f^{(k)}(0)$; với mỗi $f \in W^{m,p}(J;E)$ ta có $\varphi(t) = f^{(m)}(t)$(theo nghĩa hầu khắp nơi). Đặt

$$W_0^{m,p}(J;E) = \{ f \in W^{m,p}(J;E) \mid f^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,2,...,m-1 \}.$$

Vậy, $f \in W_0^{m,p}(J;E)$ khi và chỉ khi $f = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi(t)$ với $\varphi \in L^p(J;E)$ nào đó.

Ví dụ 1.1. *Lấy $J = (-1;1)$, khi đó:*

(i) *Hàm $f = |x| \in W^{1,p}(J)$ với $1 \leq p < +\infty$ và $f' = \varphi$ ở đây*

$$\varphi(x) = \begin{cases} +1 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{nếu } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Tổng quát, nếu hàm $f \in C^{m-1}(J)$ và $C^m(J)$ từng khúc thì $f \in W^{m,p}(J)$.

(ii) *Hàm φ xác định như trên không thuộc $W^{1,p}(J)$ với bất kỳ $1 \leq p < +\infty$.*

Cho $\alpha \geq 0$, kí hiệu

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{nếu } t > 0, \\ 0 & \text{nếu } t \leq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt, p > 0$ là hàm Gamma. Dễ thấy g_α thỏa mãn tính chất nửa nhóm

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}.$$

Định nghĩa 1.1. *Tích phân phân thứ Riemann-Liouville* bậc $\alpha > 0$ của hàm $f \in L^1(J; E)$, được xác định bởi

$$I_0^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, t > 0.$$

Khi $\alpha = n \in \mathbb{N}$, Định nghĩa 1.1 có dạng

$$\begin{aligned} I_0^n f(t) &= \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 ... \int_0^{s_{n-1}} f(s_n)ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.2. *Đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville* bậc $\alpha \in (m-1, m), m \in \mathbb{N}^+$ của hàm $f \in L^1(J; E), g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(J; E)$ xác định bởi

$$\begin{aligned} D_0^\alpha f(t) &= \frac{d^m}{dt^m} I_0^{m-\alpha} f(t) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} (g_{m-\alpha} * f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s)ds. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.3. *Đạo hàm phân thứ Caputo* bậc $\alpha \in (m-1, m), m \in \mathbb{N}^+$ của hàm $f \in W^{m,1}(J; E)$ xác định bởi

$${}^C D_0^\alpha f(t) = I_0^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s)ds.$$

Nếu thay $f \in W^{m,1}(J;E)$ bởi điều kiện $f \in C^{m-1}(J;E); g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(J;E)$ ta có biểu diễn tương đương sau

$$^{C}D_0^{\alpha} f(t) = D_0^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t)\right).$$

Định lí 1.1. *Cho $\alpha \in (m-1;m), m \in \mathbb{N}^+$. Khi đó:*

(i) *Với mỗi $f \in L^1(J;E)$, ta có*

$$^{C}D_0^{\alpha} I_0^{\alpha} f(t) = f(t);$$

(ii) *Nếu $f \in C^{m-1}(J;E); g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(J;E)$ thì*

$$I_0^{\alpha}\, {}^{C}D_0^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t).$$

1.1.2. Đạo hàm và tích phân phân thứ có trọng

Trong mục này chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa về tích phân và đạo hàm phân thứ có trọng.

Cho σ là một số không âm, với $\alpha \geq 0$, đặt

$$g_{\alpha,\sigma}(t) = e^{-\sigma t} g_{\alpha}(t).$$

Định nghĩa 1.4. *Tích phân phân thứ Riemann-Liouville có trọng* với bậc $\alpha > 0$ của hàm $f \in L^1(J;E)$, được định nghĩa bởi

$$I_0^{\alpha,\sigma} f(t) = (g_{\alpha,\sigma} * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-\sigma(t-s)} f(s) ds,$$

giả thiết tích phân ở vế phải hội tụ.

Định nghĩa 1.5. Cho hàm $f \in W^{m,1}(J;E), m \in \mathbb{N}^+$, *đạo hàm phân thứ có trọng theo nghĩa Caputo* với bậc $\alpha \in (m-1, m)$, được định nghĩa bởi

$$^{C}D_0^{\alpha,\sigma} f(t) = I_0^{m-\alpha,\sigma} \frac{d^m}{dt^m} f(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{ds^m} \left(e^{\sigma s} f(s)\right) ds.$$

Lưu ý: Khi $\sigma = 0$ khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ có trọng trở thành khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ theo nghĩa tương ứng đã được trình bày ở mục trên.

1.2. LÍ THUYẾT GIẢI THỨC

Mục này trình bày một số khái niệm cơ bản và một vài kết quả liên quan đến họ cosine, nửa nhóm và giải thức, chi tiết có thể tham khảo trong [19, 71].

Kí hiệu $\mathcal{L}(E)$ là không gian các toán tử tuyến tính, bị chặn trên không gian Banach E.

Định nghĩa 1.6. Một họ các toán tử $C(t) \in \mathcal{L}(E), t \in \mathbb{R}$, được gọi là một họ cosine trên E, nếu

(i) $C(0) = I$, I là phép đồng nhất trên E,

(ii) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$ với mọi $t, s \in \mathbb{R}$.

Khái niệm họ cosine có quan hệ mật thiết với khái niệm nửa nhóm các toán tử tuyến tính trong không gian Banach.

Định nghĩa 1.7. Một họ $S(t) \in \mathcal{L}(E)$, $0 \leq t < +\infty$, được gọi là *nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn* (gọi tắt là nửa nhóm) trên E, nếu nó thỏa mãn:

(i) $S(0) = I$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ với mọi $t, s \geq 0$.

Định nghĩa 1.8. Họ $F = \{F(t)\}_{t \in T}$ các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach E được gọi là *liên tục mạnh* nếu với mỗi $x \in E$, quỹ đạo của F tương ứng với x, $T \ni t \to F(t)x \in E$ liên tục. Một nửa nhóm liên tục mạnh còn được gọi là một *C_0-nửa nhóm.*

Một C_0-nửa nhóm hoặc một họ cosine liên tục mạnh trên không gian Banach được đặc trưng duy nhất bởi các toán tử sinh tương ứng.

Định nghĩa 1.9. Ta nói rằng toán tử tuyến tính A là *toán tử sinh* của nửa nhóm liên tục mạnh $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, nếu nó được xác định bởi

$$Ax = \frac{d}{dt}\Big|_0 S(t)x = \lim_{s \to 0^+} \frac{S(s)x - x}{s},$$

với mọi $x \in D(A)$, trong đó $D(A)$ là miền xác định của A, được xác định như sau

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{s \to 0^+} \frac{S(s)x - x}{s} \text{ tồn tại trong } E \right\}.$$

Định nghĩa 1.10. Toán tử sinh A của một họ cosine liên tục mạnh $C(t)_{t\in\mathbb{R}}$ trên E, được định nghĩa bởi

$$Ax = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_0 C(t)x = \lim_{s\to 0}\frac{2}{s^2}(C(s)x - x),$$

với mọi $x \in D(A)$, trong đó $D(A)$ là miền xác định của A, với

$$D(A) = \left\{x \in E : \lim_{s\to 0}\frac{2}{s^2}(C(s)x - x) \text{ tồn tại trong } E\right\}.$$

Định lí sau cho ta một điều kiện cần để toán tử tuyến tính A sinh ra một C_0-nửa nhóm:

Định lí 1.2. *Toán tử sinh của một C_0-nửa nhóm phải là một toán tử tuyến tính đóng và xác định trù mật.*

Ví dụ 1.2. *Xét $E = C_{ub}(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : \|f\| = \sup_{s\in\mathbb{R}^+}|f(s)| < +\infty\}$ là không gian các hàm liên tục đều và bị chặn trên $\mathbb{R}^+$. Họ toán tử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được xác định như sau:*

$$S(t) : E \to E$$
$$(S(t)f)(s) = f(t+s),\ s \in \mathbb{R}^+.$$

Khi đó, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0-nửa nhóm và toán tử sinh là toán tử đạo hàm

$$Af(s) = f'(s),$$

với miền xác định $D(A) = \{f \in E : f$ khả vi và $f' \in E\}$.

Định lí 1.3. *Giả sử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0-nửa nhóm. Khi đó, tồn tại các hằng số $\omega \in \mathbb{R}$ và $M_0 \geq 1$, sao cho*

$$\|S(t)\| \leq M_0 e^{\omega t},\ \text{với mọi } t \geq 0.$$

Nếu $\omega \leq 0, M_0 = 1$ thì $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là nửa nhóm co.

Năm 1980, Da Prato và Iannelli giới thiệu khái niệm về các họ giải thức, có thể xem như là một sự mở rộng của khái niệm C_0- nửa nhóm để nghiên cứu lớp các phương trình vi tích phân [62]. Sau đó, lí thuyết về các họ giải thức đã được phát triển nhanh chóng với mục đích nghiên cứu phương trình Volterra tổng quát

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds, t \geq 0,$$

ở đây $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, A là toán tử tuyến tính đóng trên không gian Banach phức X và $f : \mathbb{R}_+ \to X$ là hàm liên tục.

Định nghĩa 1.11. Cho $\alpha > 0$. Toán tử $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ được gọi là một α- giải thức nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

(a) $S_\alpha(\cdot)$ liên tục mạnh trên $\mathbb{R}_+$ và $S_\alpha(0) = I$;

(b) $S_\alpha(s)S_\alpha(t) = S_\alpha(t)S_\alpha(s)$, với mọi $s, t \geq 0$;

(c) phương trình hàm

$$S_\alpha(s)I_0^\alpha S_\alpha(t) - I_0^\alpha S_\alpha(s)S_\alpha(t) = I_0^\alpha S_\alpha(t) - I_0^\alpha S_\alpha(s),$$

thỏa mãn với mọi $s, t \geq 0$.

Toán tử sinh A của S_α, được định nghĩa bởi

$$D(A) := \left\{ x \in E : \lim_{t \to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{g_{\alpha+1}(t)} \text{ tồn tại trong } E \right\}$$

và

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{g_{\alpha+1}(t)}, x \in D(A),$$

với $g_\alpha(t)$ là hàm cho bởi công thức (1.2).

Định nghĩa 1.12. Một α- giải thức S_α được gọi là bị chặn mũ nếu tồn tại các hằng số $M_1 \geq 1, \omega \geq 0$, sao cho

$$\|S_\alpha(t)\| \leq M_1 e^{\omega t}, t \geq 0.$$

Trong trường hợp này ta viết $A \in \mathcal{C}_\alpha(M_1, \omega)$, ở đây A là toán tử sinh của S_α.

Mệnh đề 1.1. *Cho S_α là một α-giải thức sinh bởi A. Các khẳng định sau đây là đúng:*

(a) $S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ *và* $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$ *với mọi* $x \in D(A)$ *và* $t \geq 0$.

(b) *Với mọi* $x \in E, I_0^\alpha S_\alpha(t)x \in D(A)$ *và*

$$S_\alpha(t)x = x + AI_0^\alpha S_\alpha(t)x, t \geq 0.$$

(c) $x \in D(A)$ *và* $Ax = y$ *nếu và chỉ nếu*

$$S_\alpha(t)x = x + I_0^\alpha S_\alpha(t)y, t \geq 0.$$

(d) A *là toán tử đóng và xác định trù mật.*

(e) *$S_\alpha(\cdot)x$ là nghiệm tích phân duy nhất của bài toán Cauchy tổng quát*

$$\begin{aligned} &D_0^\alpha u(t) = Au(t), t > 0, \\ &u(0) = x, u^{(k)} = 0, k = 1, 2, ..., \lceil \alpha \rceil - 1, \end{aligned}$$

với mỗi $x \in E$, ở đây $\lceil \alpha \rceil$ là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α.

Mệnh đề 1.2. *Cho $\alpha > 0, A \in \mathcal{C}_\alpha(M_1, \omega)$ nếu và chỉ nếu $(\omega^\alpha, +\infty) \subset \rho(A)$ và tồn tại một hàm liên tục mạnh $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ sao cho $\|S_\alpha(t)\| \leq M_1 e^{\omega t}$ với mọi $t \geq 0$ và*

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt, \ Re\lambda > \omega,$$

với mọi $x \in E$. Hơn nữa, S_α là α-giải thức sinh bởi A.

Trong trường hợp tổng quát, khi so sánh với khái niệm C_0-nửa nhóm (hay họ hàm cosine), ta thấy rằng họ giải thức không có tính chất nửa nhóm $T(t+s) = T(t)T(s)$ (cũng như tính chất của họ hàm cosine $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$). Tuy nhiên, trong một số trường hợp cụ thể chẳng hạn với $\alpha = 1$, $S_\alpha(\cdot) = S_1(\cdot)$ là một C_0- nửa nhóm hay với $\alpha = 2$, ta có một họ cosine $S_2(\cdot)$. Theo nguyên lí phụ thuộc [6], nếu A sinh ra một β-giải thức với $\beta > \alpha$ thì nó cũng sinh ra một α-giải thức. Đặc biệt, nếu A là toán tử sinh của một họ cosine, thì tồn tại một α-giải thức sinh bởi A với $\alpha \in (1, 2)$.

Một kết quả khác về sự tồn tại của α-giải thức đã được nghiên cứu trong [18].

Định nghĩa 1.13. Cho A là một toán tử đóng, xác định trù mật trên không gian Banach E. Khi đó A được gọi là một toán tử quạt kiểu (ω, θ), nếu tồn tại $\omega \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}), \mathcal{N} > 0$ sao cho tập giải của nó nằm trong $\mathbb{C} \backslash \Sigma_{\omega,\theta}$ và

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{\mathcal{N}}{|\lambda - \omega|}, \ \lambda \notin \Sigma_{\omega,\theta},$$

ở đây

$$\Sigma_{\omega,\theta} = \begin{cases} \{\omega + \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(-\lambda)| < \theta\} & \text{nếu } \theta > 0, \\ (-\infty, \omega) & \text{nếu } \theta = 0. \end{cases}$$

Trong trường hợp A là một toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, $S_\alpha(\cdot)$ tồn tại và có công thức sau:

$$S_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma e^{t\lambda} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha I - A)^{-1} d\lambda & \text{nếu } t > 0, \\ I & \text{nếu } t = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

với γ là một đường thích hợp nằm ngoài $\Sigma_{\omega,\theta}$. Hơn nữa, ta có kết quả sau về dáng điệu của $S_\alpha(\cdot)$:

Định lí 1.4. ([18, Định lí 1]) *Cho $A : D(A) \subset X \to X$ là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$. Khi đó, tồn tại $\hat{C} > 0$ độc lập với t sao cho*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \begin{cases} \hat{C}(1 + \omega\, t^\alpha) e^{\omega^{1/\alpha} t}, & \omega \geq 0, \\ \dfrac{\hat{C}}{1 + |\omega| t^\alpha}, & \omega < 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

với $t \geq 0$.

Trong trường hợp A là toán tử quạt kiểu $(0, \theta)$ với góc $\theta \in [0, (1 - \frac{\alpha}{2})\pi)$ và $0 \in \rho(A)$, ta thu được các kết quả.

Định lí 1.5. ([47, Định lí 3.1, 3.2, 3.7]). *Họ toán tử $\{S_\alpha(t)\}$ cho bởi (1.3) thỏa mãn*

(1) *Tồn tại $M \geq 1$ sao cho $\|S_\alpha(t)\| \leq M$ với mọi $t \geq 0$.*

(2) *Ánh xạ $t \mapsto S_\alpha(t)$ là liên tục theo chuẩn với $t > 0$.*

(3) *Nếu $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ compact với $\lambda \in \rho(A)$, khi đó $S_\alpha(t)$ compact với $t > 0$. Đặc biệt, nếu A sinh ra một C_0-nửa nhóm compact, thì $S_\alpha(t)$ cũng compact với $t > 0$.*

Với hàm g_α cho bởi (1.2), ta có định lí sau.

Định lí 1.6. ([47, Định lí 3.6, 5.3]). *Khi $t > 0$, ta có*

(1) *Tồn tại $C_\alpha > 0$ sao cho $\|(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t)\| \leq C_\alpha t^{\alpha-1}$;*

(2) *Với mọi $x \in X, (g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t)x \in D(A)$ và $\|A(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t)x\| \leq \dfrac{C}{t}\|x\|$ với hằng số dương C nào đó;*

(3) $S'_\alpha(t) = -A(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t)$;

(4) $\left\| \dfrac{d}{dt}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t) \right\| \leq C_\alpha t^{\alpha-2}$,

ở đây kí hiệu '$*$' là tích chập Laplace.

1.3. ĐỘ ĐO KHÔNG COMPACT VÀ CÁC ƯỚC LƯỢNG

Trong mục này, chúng tôi trình bày khái niệm độ đo không compact và một số ước lượng liên quan xem [5, 40].

Định nghĩa 1.14. Hàm $\beta : \mathcal{P}_b(E) \to \mathbb{R}^+$ được gọi là một *độ đo không compact* trong E nếu

$$\beta(\overline{co}\,\Omega) = \beta(\Omega) \text{ với mọi } \Omega \in \mathcal{P}_b(E),$$

trong đó $\overline{co}\,\Omega$ là bao lồi đóng của Ω.

Độ đo β được gọi là:

(i) *đơn điệu* nếu $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E)$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$ kéo theo $\beta(\Omega_1) \leq \beta(\Omega_2)$;

(ii) *không suy biến* nếu $\beta(\{x\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ với mỗi $x \in E, \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;

(iii) *bất biến với nhiễu compact* nếu $\beta(K \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ với mọi tập compact tương đối $K \subset E$ và $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;

(iv) *nửa cộng tính* $\beta(\Omega_0 \cup \Omega_1) \leq \max\{\beta(\Omega_0), \beta(\Omega_1)\}$ với mọi $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{P}_b(E)$;

(v) *nửa cộng tính đại số* nếu $\beta(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \beta(\Omega_1) + \beta(\Omega_2)$ với mỗi $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E)$;

(vi) *chính quy* nếu $\beta(\Omega) = 0$ tương đương với tính compact tương đối của Ω.

Một ví dụ quan trọng về độ đo không compact là *độ đo Hausdorff* $\chi(\cdot)$, được định nghĩa như sau:
Hàm $\chi : \mathcal{P}_b(E) \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi

$$\chi(B) = \inf\{\epsilon > 0 : B \text{ có một } \epsilon\text{-lưới hữu hạn}\},$$

được gọi là độ đo không compact Hausdorff trên E.

Dựa vào độ đo Hausdorff χ, ta đưa ra khái niệm *độ đo rời rạc* χ_0 như sau:

$$\chi_0(\Omega) = \sup\{\chi(D) : D \in \Delta(\Omega)\},$$

trong đó $\Delta(\Omega)$ là họ tất cả các tập con không quá đếm được của Ω (xem [5]). Ta có

$$\frac{1}{2}\chi(\Omega) \leq \chi_0(\Omega) \leq \chi(\Omega),$$

với mọi tập bị chặn $\Omega \subset E$.

Mệnh đề 1.3. *Kí hiệu χ là độ đo Hausdorff trong E và $\Omega \subset E$ là một tập bị chặn. Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset \Omega$ sao cho*

$$\chi(\Omega) \leq 2\chi(\{x_n\}) + \epsilon.$$

Kí hiệu $J = [0, T]$.

Định nghĩa 1.15. Cho $D \subset L^1(J; E)$. Ta gọi D là tập *bị chặn tích phân* nếu tồn tại hàm $\nu \in L^1(J) := L^1(J; \mathbb{R}^+)$ sao cho

$$\|f(t)\| \leq \nu(t)$$

với mọi $f \in D$ và với hầu khắp $t \in J$.

Mệnh đề 1.4 ([40], Định lí 4.2.2)**.** *Nếu $\{w_n\} \subset L^1(J; E)$ bị chặn tích phân, thì*

$$\chi\Big(\Big\{\int_0^t w_n(s)ds\Big\}\Big) \leq 2\int_0^t \chi(\{w_n(s)\})ds,$$

với $t \in J$.

Áp dụng Mệnh đề 1.3 và Mệnh đề 1.4, ta có mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.5. *Nếu $D \subset L^1(J; E)$ sao cho D bị chặn tích phân và*

$$\chi(D(t)) \leq q(t), \text{ với hầu khắp } t \in J$$

và $q \in L^1(J; \mathbb{R}^+)$, thì

$$\chi\left(\int_0^t D(s)ds\right) \leq 4\int_0^t q(s)ds$$

với $t \in J$, ở đây $\displaystyle\int_0^t D(s)ds = \left\{\int_0^t \xi(s)ds : \xi \in D\right\}$.

Chứng minh. Với $\epsilon > 0$, tồn tại một dãy $\{\xi_n\} \subset D$ sao cho

$$\chi\Big(\int_0^t D(s)ds\Big) \leq 2\chi\Big(\Big\{\int_0^t \xi_n(s)ds\Big\}\Big) + \epsilon,$$

do Mệnh đề 1.3. Áp dụng Mệnh đề 1.4, ta có

$$\begin{aligned}\chi\Big(\int_0^t D(s)ds\Big) &\leq 4\int_0^t \chi(\{\xi_n(s)\})ds + \epsilon \\ &\leq 4\int_0^t q(s)ds + \epsilon.\end{aligned}$$

Do ϵ là bất kì, ta có điều phải chứng minh. □

Bây giờ, ta định nghĩa hai độ đo không compact trên $C([0,T];E)$ sẽ được sử dụng trong các chương sau. Cho trước $L > 0$ và $D \subset C([0,T];E)$, đặt

$$\omega_T(D) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\chi(D(t)), \text{ với } D(t) := \{x(t) : x \in D\}, \tag{1.5}$$

$$mod_T(D) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in D}\max_{t,s\in[0,T],|t-s|<\delta} \|x(t) - x(s)\|. \tag{1.6}$$

Theo [40, Ví dụ 2.1.2, 2.1.4], ω_T và mod_T là các độ đo không compact thỏa mãn tất cả các tính chất phát biểu trong Định nghĩa 1.14, ngoại trừ tính chính quy. Thêm nữa, với $D \subset C([0,T];E)$,

- $\omega_T(D) = 0$ khi và chỉ khi $D(t)$ compact tương đối với mọi $t \in [0,T]$;
- $mod_T(D) = 0$ khi và chỉ khi D đồng liên tục.

Đặt

$$\chi_T(D) = \omega_T(D) + mod_T(D),$$

khi đó χ_T là một độ đo không compact chính quy trên $C([0,T];E)$. Thật vậy, nếu $\chi_T(D) = 0$ thì $\omega_T(D) = mod_T(D) = 0$. Điều này chứng tỏ rằng $D(t)$ là compact tương đối với mọi $t \in [0,T]$ và D là đồng liên tục. Do đó D là compact tương đối theo Định lí Arzelà-Ascoli.

1.4. ÁNH XẠ NÉN VÀ CÁC ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

1.4.1. Một số vấn đề về giải tích đa trị

Trong mục này, chúng tôi trình bày về một số khái niệm và kết quả của giải tích đa trị, chi tiết hơn có thể xem trong [40]. Cho Y là một không gian metric.

Định nghĩa 1.16. Ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : Y \to \mathcal{P}(E)$ được gọi là:

(i) *nửa liên tục trên* nếu $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{y \in Y : \mathcal{F}(y) \cap V \neq \emptyset\}$ là tập con đóng của Y với mọi tập đóng $V \subset E$;

(ii) *nửa liên tục trên yếu* nếu $\mathcal{F}^{-1}(V)$ là tập con đóng của Y với mọi tập đóng yếu $V \subset E$;

(iii) *đóng* nếu đồ thị $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(y,z) : z \in \mathcal{F}(y)\}$ là tập đóng trong $Y \times E$;

(iv) *compact* nếu $\mathcal{F}(Y)$ compact tương đối trong E;

(v) *tựa compact* nếu ánh xạ hạn chế trên một tập con compact $A \subset Y$ bất kì là compact.

Ta có kết quả sau về điều kiện nửa liên tục trên của một ánh xạ đa trị.

Bổ đề 1.1 ([40, Định lí 1.1.12])**.** *Cho $G : Y \to \mathcal{P}(E)$ là ánh xạ đa trị đóng, tựa compact và có giá trị compact. Khi đó, G nửa liên tục trên.*

Bổ đề 1.2 ([9, Mệnh đề 2])**.** *Cho E là một không gian Banach và Ω là một tập khác rỗng của một không gian Banach X. Giả sử rằng $G : \Omega \to \mathcal{P}(E)$ là ánh xạ đa trị có giá trị lồi, compact yếu. Khi đó, G nửa liên tục trên yếu nếu và chỉ nếu $\{x_n\} \subset \Omega$ với $x_n \to x_0 \in \Omega$ và $y_n \in G(x_n)$ kéo theo tồn tại dãy con của y_n hội tụ yếu về $y_0 \in G(x_0)$.*

Sau đây, ta nhắc lại khái niệm hàm chọn và nêu một số kết quả được dùng trong Chương 3.

Định nghĩa 1.17. Hàm $f : [a, b] \to E$, với $[a, b] \subset \mathbb{R}$, được gọi là *hàm chọn đo được mạnh* của hàm đa trị $F : [a, b] \to \mathcal{K}v(E)$ nếu f đo được mạnh và

$$f(t) \in F(t), \text{ với hầu khắp } t \in [a, b].$$

Định nghĩa 1.18. Dãy $\{f_n\} \subset L^1(J; E)$ được gọi là *nửa compact* nếu dãy này bị chặn tích phân và $\{f_n(t)\} \subset K(t)$ với hầu khắp $t \in J$, trong đó $K(t) \subset E, t \in J$, là một họ các tập compact.

Ta biết rằng nếu $\{f_n\}$ là một dãy nửa compact trong $L^1(J; E)$, thì $\{f_n\}$ compact yếu [21, 40]. Ta cần sử dụng kết quả đã được chứng minh trong [70, Bổ đề 1] như sau:

Bổ đề 1.3. *Cho $\Phi(t, s)$ là một họ các toán tử tuyến tính bị chặn trên X với $t, s \in [0, T], s \leq t$. Giả sử rằng Φ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(Φ1) *tồn tại hàm $\rho \in L^q(0, T), q \geq 1$ sao cho $\|\Phi(t, s)\| \leq \rho(t - s)$ $\forall t, s \in [0, T], s \leq t$;*

(Φ2) *$\|\Phi(t, s) - \Phi(r, s)\| \leq \epsilon$ với $0 \leq s \leq r - \epsilon, r < t = r + h \leq T$ và $\epsilon = \epsilon(h) \to 0$ khi $h \to 0$.*

Khi đó, toán tử $\mathbf{S} : L^{q'}(0, T; X) \to C([0, T]; X)$ định nghĩa bởi

$$(\mathbf{S}g)(t) := \int_0^t \Phi(t, s)g(s)ds$$

biến mỗi tập bị chặn tích phân thành tập đồng liên tục, ở đây q' là liên hợp của q ($q' = +\infty$ nếu $q = 1$).

1.4.2. Ánh xạ nén và một số định lí điểm bất động

Lí thuyết điểm bất động cho ánh xạ nén là công cụ cơ bản để chứng minh sự tồn tại nghiệm cho các bài toán trong luận án. Ngoài ra lí thuyết điểm bất động cũng được sử dụng để nghiên cứu tính ổn định của các hệ vi phân theo đề xuất của Burton và Furumochi [7, 8]. Chi tiết hơn về ánh xạ nén và các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén, có thể xem trong [5, 40].

Định nghĩa 1.19. Ánh xạ $\mathcal{F} : Z \subseteq E \to \mathcal{P}(E)$ được gọi là một ánh xạ *nén theo độ đo* β (β-nén) nếu với tập bị chặn $\Omega \subset Z$, bất đẳng thức

$$\beta(\Omega) \leq \beta(\mathcal{F}(\Omega))$$

suy ra tính compact tương đối của Ω.

Với β là một độ đo đơn điệu và không suy biến trong E, từ Hệ quả 3.3.1 và Mệnh đề 3.5.1 trong [40] ta có định lí điểm bất động sau.

Định lí 1.7. *Cho $\mathcal{M}$ là một tập con lồi, đóng, bị chặn của E và $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{K}v(\mathcal{M})$ là ánh xạ đóng và $\beta-$nén. Khi đó,* $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}) := \{x \in \mathcal{F}(x)\}$ *là tập khác rỗng và compact.*

Các nguyên lí điểm bất động sau đây được coi là hệ quả của Định lí 1.7.

Định lí 1.8. *Cho $\mathcal{M}$ là một tập con lồi, compact trong E và $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$ là một ánh xạ đa trị đóng với giá trị lồi. Khi đó,* $\mathrm{Fix}(\mathcal{F})$ *là tập khác rỗng.*

Định lí 1.9. *Cho $\mathcal{M}$ là một tập con lồi, đóng, bị chặn của E và $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ là một ánh xạ liên tục và β-nén. Khi đó, $Fix(\mathcal{F}) := \{x \in E : x = \mathcal{F}(x)\}$ là một tập compact khác rỗng.*

1.5. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC HỆ VI PHÂN

1.5.1. Ổn định Lyapunov

Ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản về ổn định theo nghĩa Lyapunov, ổn định yếu cho trường hợp không ô-tô-nôm xem [31].

Xét hệ

$$y' = g(t, y), \tag{1.7}$$

với $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục. Giả sử $\hat{y}$ là một nghiệm của (1.7) trên $[t_0, +\infty)$.

Định nghĩa 1.20. Nghiệm $\hat{y}$ của (1.7) được gọi là *ổn định Lyapunov* nếu với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ sao cho nếu

$$\|y_0 - \hat{y}(t_0)\| < \delta(\epsilon, t_0),$$

thì

$$\|y(t; t_0, y_0) - \hat{y}(t)\| < \epsilon,$$

với mọi $t \geq t_0$; ở đây $y(.; t_0, y_0)$ là nghiệm của (1.7) sao cho $y(t_0; t_0, y_0) = y_0$.

Trong định nghĩa trên nếu δ không phụ thuộc vào t_0 thì ta có khái niệm *ổn định Lyapunov đều.*

Khái niệm ổn định theo nghĩa Lyapunov tổng quát có thể quy về một trường hợp đặc biệt bằng cách xét hệ sau

$$x' = f(t, x), \tag{1.8}$$

ở đây $f(t, x) = g(t, x + \hat{y}(t)) - g(t, \hat{y}(t))$.

Ta thấy rằng $f(t, 0) \equiv 0$, do đó $x(t) \equiv 0$ là một nghiệm của (1.8). Hơn nữa, nếu $y(t)$ là một nghiệm của (1.7) thì $x(t)$ xác định bởi $x(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ là một nghiệm của (1.8). Ngược lại, nếu $x(t)$ là một nghiệm của (1.8) thì $y(t)$ xác định bởi $y(t) = x(t) + \hat{y}(t)$ là một nghiệm của (1.7). Do đó, tính ổn định của nghiệm $\hat{y}$ của (1.7) tương đương với tính ổn định của nghiệm $x \equiv 0$ của (1.8). Vì vậy, không mất tính tổng quát, từ đây về sau chúng ta chỉ xét tính ổn định của nghiệm $x \equiv 0$ đối với hệ dạng (1.8).

Định nghĩa 1.21. Nghiệm $x \equiv 0$ của (1.8) được gọi là:

$*$ *Hút* nếu tồn tại $\delta_0 > 0$, sao cho nếu $\|x_0\| < \delta_0$ thì *với mọi* nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ của (1.8) ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0$.

$*$ *Hút yếu* nếu tồn tại $\delta_0 > 0$, sao cho nếu $\|x_0\| < \delta_0$ thì *tồn tại* nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ của (1.8) thỏa mãn $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0$.

Dựa vào các khái niệm về tính hút như trên ta đưa ra các khái niệm ổn định tiệm cận cho hệ (1.8) như sau.

Định nghĩa 1.22. Nghiệm $x \equiv 0$ của (1.8) được gọi là:

$*$*Ổn định tiệm cận* theo nghĩa Lyapunov nếu nó ổn định Lyapunov và thỏa mãn tính hút.

$*$*Ổn định tiệm cận yếu* nếu nó ổn định Lyapunov và hút yếu.

Định nghĩa 1.23. Nghiệm $x \equiv 0$ của (1.8) được gọi là *ổn định mũ* nếu tồn tại $\delta > 0, \alpha > 0, \beta \geq 1$ sao cho với mọi x_0 với $\|x_0\| < \delta$ ta có $\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\|$ với $t \geq t_0$.

Dựa vào định nghĩa trên ta thấy rằng từ tính ổn định mũ ta suy ra được tính ổn định tiệm cận của nghiệm. Ngoài ra, tính ổn định mũ còn cho ta biết tốc độ hội tụ của nghiệm khi $t \to +\infty$.

1.5.2. Ổn định thời gian hữu hạn và tính hút trong thời gian hữu hạn

Trong phần này chúng tôi đưa ra một số khái niệm và kết quả liên quan đến tính ổn định trong thời gian hữu hạn và tính hút trong thời gian hữu hạn. Khái niệm ổn định thời gian hữu hạn cho hệ động lực đã được giới thiệu bởi Weiss và Infante [75], còn khái niệm hút trong thời gian hữu hạn được đề cập bởi Giesl và Rasmussen [28] đối với hệ vi phân không có trễ, trong không gian hữu hạn chiều. Khác với ổn định Lyapunov, ổn định thời gian hữu hạn liên quan đến tính bị chặn của hàm trạng thái trong khoảng thời gian hữu hạn.

Xét phương trình vi phân

$$x' = f(t, x); t \in \mathcal{J}, \tag{1.9}$$

ở đây $x(t) \in \mathbb{R}^n, \mathcal{J} = [t_0; t_0 + T)$. Hàm $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được giả thiết đủ trơn theo x và t (trên $\mathcal{J}$) để đảm bảo sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm trên $\mathcal{J}$ cũng như sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu tại t_0.

Định nghĩa 1.24. ([75, Định nghĩa 1])(*Ổn định thời gian hữu hạn*). Hệ (1.9) được gọi là ổn định ứng với $(\alpha, \beta, \mathcal{J}), \alpha \leq \beta$, nếu với mỗi quỹ đạo $x(t)$ thỏa mãn $\|x(t_0)\| < \alpha$ thì $\|x(t)\| < \beta$, với mọi $t \in \mathcal{J}$.

Nhận xét 1.1. *Khái niệm ổn định thời gian hữu hạn và khái niệm ổn định tiệm cận Lyapunov là hai khái niệm độc lập theo nghĩa: một hệ ổn định thời gian hữu hạn thì có thể không ổn định tiệm cận Lyapunov, ngược lại một hệ ổn định tiệm cận Lyapunov có thể không ổn định thời gian hữu hạn.*

Để minh họa cho nhận xét trên, ta đưa ra ví dụ sau:

Ví dụ 1.3. ([36, Ví dụ 2.1]) *Xét các phương trình vi phân có trễ*

$$\dot{x}(t) = -1.2x(t) + \frac{t+2}{t+1}x(t-1), t \geq 0, \tag{1.10}$$

$$\dot{x}(t) = -0.8x(t) + \frac{t}{t+6}x(t-1), t \geq 0. \tag{1.11}$$

Phương trình (1.10) *là ổn định tiệm cận Lyapunov toàn cục. Tuy nhiên, phương trình này không ổn định thời gian hữu hạn ứng với* $\alpha = 1; \beta = 1.25; T = 10$. *Ngược lại, phương trình* (1.11) *ổn định thời gian hữu hạn ứng với* $\alpha = 1; \beta = 1.5; T = 10$ *nhưng* (1.11) *không ổn định tiệm cận Lyapunov, thậm chí mọi nghiệm khác không của* (1.11) *dần tới vô cùng khi* $t \to +\infty$.

Kí hiệu $\varphi(t, t_0, \xi)$ là nghiệm của bài toán (1.9) với dữ kiện ban đầu $x(t_0) = \xi$.

Định nghĩa 1.25. ([28, Định nghĩa 2.1])(*Tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn*). Cho $\mu : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ là một nghiệm của (1.9). Khi đó:

(i) μ được gọi là hút trên $\mathcal{J}$ nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\|\varphi(t_0+T, t_0, \xi) - \mu(t_0+T)\| < \|\xi - \mu(t_0)\| \text{ với mọi } \xi \in B_\eta(\mu(t_0)) \backslash \{\mu(t_0)\}.$$

(ii) μ được gọi là hút mũ trên $\mathcal{J}$ nếu

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \text{dist}(\varphi(t_0 + T, t_0, B_\eta(\mu(t_0))); \{\mu(t_0 + T)\}) < 1,$$

và số

$$\frac{1}{T} \ln \left(\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \text{dist}(\varphi(t_0 + T, t_0, B_\eta(\mu(t_0))); \{\mu(t_0 + T)\}) \right),$$

được gọi là tốc độ hút mũ.

Để minh họa cho khái niệm trên, ta xét ví dụ sau

Ví dụ 1.4. ([28, Ví dụ 2.2]) *Cho phương trình vi phân tuyến tính không ô-tô-nôm*

$$x' = a(t)x,$$

với $x \in \mathbb{R}$ *và* $a : [0, T] \to \mathbb{R}$ *là hàm liên tục.*

Nếu $A := \int_0^T a(s)ds < 0$, *thì nghiệm tầm thường* $x(t) = 0, \ \forall t \in [0, T]$ *là hút mũ trên* $[0, T]$ *với tốc độ hút là* $\frac{A}{T}$. *Vì*

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} dist\big(\lambda(T, 0, B_\eta(0)), \{0\}\big) = \frac{1}{\eta} \eta e^{\int_0^T a(s)ds} = e^A < 1,$$

và $\dfrac{1}{T}\ln e^A = \dfrac{A}{T}$.

Từ định nghĩa dễ thấy rằng từ tính hút mũ ta suy ra được tính hút. Ví dụ sau đây chỉ ra rằng điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 1.5. ([28, Ví dụ 2.3]). *Xét phương trình vi phân*

$$\dot{x} = a(t)x^3,$$

ở đây $a : [0;T] \to \mathbb{R}$ *là một hàm liên tục. Nếu* $A := \int_0^T a(t)dt < 0$ *khi đó nghiệm tầm thường là hút trên* $[0;T]$*, nhưng không hút mũ. Thật vậy, ta có*

$$\varphi(T, 0, \xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1 - 2A\xi^2}}.$$

Nghiệm tầm thường hút khi $\sqrt{1 - 2A\xi^2} > 1$ *với mọi* $\xi \neq 0$ *khi* $A < 0$*. Tuy nhiên,*

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta}\mathrm{dist}(\varphi(T, 0, B_\eta(0)); \{0\}) = \limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - 2A\eta^2}} = 1,$$

điều này chứng tỏ rằng nghiệm tầm thường không hút mũ trên $[0;T]$.

Nhận xét 1.2. *Giả sử ta xét hệ* (1.9) *trên đoạn vô hạn nghĩa là hàm vế phải* $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*. Khi đó, nếu nghiệm* $\mu : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^n$ *là hút mũ trên mỗi đoạn* $[0, T]$ *với* $T > 0$ *và tốc độ hút mũ tương ứng bị chặn thì* μ *cũng hút theo nghĩa Lyapunov. Mặt khác, nếu một nghiệm hút theo nghĩa Lyapunov trong thời gian vô hạn, thì nhìn chung có thể tồn tại đoạn* $[0, T]$ *mà trên đó nó không có tính hút.*

1.6. MỘT SỐ KẾT QUẢ BỔ TRỢ

1.6.1. Các không gian hàm

Cho Ω là một tập con đo được và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Trong luận án này, các không gian hàm sau (xem [3]) sẽ được sử dụng.

- $L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, là không gian bao gồm tất cả các hàm khả tích Lebesgue bậc p trên Ω. Chuẩn trên $L^p(\Omega)$ được định nghĩa như sau:

  $$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

  Chú ý rằng $L^p(\Omega)$ là không gian Banach phản xạ khi $1 < p < +\infty$.

- $L^\infty(\Omega)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm đo được và bị chặn hầu khắp nơi trên Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

- $L^p_{loc}(\Omega), 1 \le p < +\infty$, là không gian các hàm khả tích Lebesgue địa phương bậc p trên Ω

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^p(K) \text{với mọi tập compact } K \subset \Omega\}.$$

Ngoài ra, ta sử dụng các không gian hàm phụ thuộc thời gian sau:

- $C([a,b];E)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u : [a,b] \to E$ liên tục, với chuẩn:

$$\|u\|_{C([a,b];E)} = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_E.$$

- $L^p(a,b;E)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u : (a,b) \to E$ sao cho

$$\|u\|_{L^p(a,b;E)} := \Big(\int_a^b \|u(t)\|_E^p dt\Big)^{1/p} < +\infty.$$

- $\mathcal{C}_\tau := C([-\tau,0];E)$, với $\tau > 0$ cho trước.

Sau đây, chúng tôi trình bày về không pha được sử dụng trong Chương 3. Những không gian này được giới thiệu trong tài liệu tham khảo [33].

Định nghĩa 1.26. $(\mathcal{B}, |\cdot|_\mathcal{B})$ là không gian tuyến tính gồm các hàm từ $(-\infty, 0]$ vào E có trang bị nửa chuẩn, thỏa mãn các tiên đề được phát biểu dưới đây.

Nếu $v : (-\infty, \sigma + T] \to X$, ở đó $\sigma \in \mathbb{R}$ và T là số thực dương, là một hàm sao cho $v|_{[\sigma,\sigma+T]} \in C([\sigma,\sigma+T];X)$ và $v_\sigma \in \mathcal{B}$ với $v_\sigma(s) = v(\sigma + s)$ khi $s \in (-\infty, 0]$, thì ta có

(B1) $v_t \in \mathcal{B}$ với $t \in [\sigma, \sigma + T]$;

(B2) hàm $t \mapsto v_t$ là liên tục trên đoạn $[\sigma, \sigma + T]$;

(B3) $|v_t|_\mathcal{B} \le K(t-\sigma) \sup\{\|v(s)\| : \sigma \le s \le t\} + M(t-\sigma)|v_\sigma|_\mathcal{B}$ với mỗi $t \ge \sigma$, trong đó $K, M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, K là hàm liên tục, M là hàm bị chặn địa phương và các hàm này độc lập với v;

(B4) tồn tại $\ell > 0$ sao cho $\|\phi(0)\| \le \ell|\phi|_\mathcal{B}$, với mọi $\phi \in \mathcal{B}$.

Sau đây là hai ví dụ điển hình về không gian pha.

Ví dụ 1.6.

$$C_\gamma = \{\phi \in C((-\infty, 0]; X) \text{ sao cho } \lim_{\theta \to -\infty} e^{\gamma\theta}\phi(\theta) \text{ tồn tại trong } X\}.$$

Nếu $\gamma > 0$ thì C_γ là không gian Banach với chuẩn xác định bởi

$$|\phi|_\gamma = \sup_{\theta \le 0} e^{\gamma\theta}\|\phi(\theta)\|.$$

Trong trường hợp này $K(t) = 1, M(t) = e^{-\gamma t}$, với mọi $t \ge 0$.

Một ví dụ quan trọng khác là không gian CL^p_g, như sau:

Ví dụ 1.7. *Giả sử $1 \le p < +\infty,\ 0 \le r < +\infty$ và $g : (-\infty, -r] \to \mathbb{R}$ là một hàm đo được Borel và không âm trên $(-\infty, -r)$. Kí hiệu CL^p_g là lớp các hàm $\varphi : (-\infty, 0] \to X$ sao cho φ liên tục trên $[-r, 0]$ và $g(\cdot)\|\varphi(\cdot)\|^p \in L^1(-\infty, -r)$. Nửa chuẩn trên CL^p_g được xác định bởi*

$$|\varphi|_{CL^p_g} = \sup_{-r \le \theta \le 0} \{\|\varphi(\theta)\|\} + \left[\int_{-\infty}^{-r} g(\theta)\|\varphi(\theta)\|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.12}$$

Giả sử rằng

$$\int_s^{-r} g(\theta)d\theta < +\infty, \text{ với mọi } s \in (-\infty, -r) \text{ và} \tag{1.13}$$

$$g(s+\theta) \le G(s)g(\theta) \text{ với } s \le 0 \text{ và } \theta \in (-\infty, -r), \tag{1.14}$$

ở đó $G : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^+$ là bị chặn địa phương. Nếu có (1.13)-(1.14), thì CL^p_g thỏa mãn (B1)-(B4) với $\ell = 1$ (xem [38]). Hơn nữa, ta có thể lấy

$$K(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } 0 \le t \le r, \\ 1 + \left[\int_{-t}^{-r} g(\theta)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} & \text{với } t > r; \end{cases} \tag{1.15}$$

$$M(t) = \begin{cases} \max\{1 + \left[\int_{-r-t}^{-r} g(\theta)d\theta\right]^{\frac{1}{p}}, G(-t)^{\frac{1}{p}}\} & \text{với } 0 \le t \le r, \\ \max\{\left[\int_{-r-t}^{-r} g(\theta)d\theta\right]^{\frac{1}{p}}, G(-t)^{\frac{1}{p}}\} & \text{với } t > r. \end{cases} \tag{1.16}$$

Một số ví dụ khác về không gian pha được trình bày trong tài liệu tham khảo [34, 38].

1.6.2. Một số bất đẳng thức thường dùng

⋆ Bất đẳng thức Hölder: Giả thiết $1 \leq p, q \leq +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó, nếu $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ thì $uv \in L^1(\Omega)$ và

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \dot{\|} v\|_{L^q(\Omega)}.$$

⋆ Bất đẳng thức Gronwall: Giả sử $x(t)$ là một hàm liên tục tuyệt đối trên $[0; T]$ và thỏa mãn

$$\frac{dx}{dt} \leq g(t)x + h(t), \text{ với hầu khắp } t,$$

trong đó $g(t)$ và $h(t)$ là các hàm khả tích trên $[0; T]$. Khi đó

$$x(t) \leq x(0)e^{G(t)} + \int_0^t e^{G(t)-G(s)} h(s) ds,$$

với mọi $0 \leq t \leq T$, ở đó

$$G(t) = \int_0^t g(\theta) d\theta.$$

⋆ Bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân: Cho $x(t)$ là một hàm khả tích, không âm trên $[0; T]$ và thỏa mãn với hầu khắp t bất đẳng thức tích phân

$$x(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t x(s) ds,$$

với C_1, C_2 là các hằng số không âm. Khi đó

$$x(t) \leq C_1(1 + C_2 t e^{C_2 t})$$

với hầu khắp $t, 0 \leq t \leq T$.

⋆ Bất đẳng thức Gronwall với nhân kì dị (xem [76], Hệ quả 2): Giả sử $\beta > 0, b \geq 0$ và $a(\cdot)$ là một hàm không âm, không giảm và khả tích địa phương trên $[0, T), 0 < T \leq +\infty$. Nếu hàm $u(\cdot)$ không âm và khả tích địa phương trên $[0, T)$ với

$$u(t) \leq a(t) + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds, t \in [0, T]$$

thì

$$u(t) \leq a(t)E_\beta(b\Gamma(\beta)t^\beta),$$

ở đây E_β là hàm Mittag-Leffler xác định bởi

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)},\ E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

Chương 2

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TÁN XẠ-SÓNG NỬA TUYẾN TÍNH CHỨA XUNG VÀ TRỄ HỮU HẠN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu lớp phương trình vi tích phân phân thứ chứa xung và điều kiện không cục bộ, trong đó phần tuyến tính có dạng tán xạ-sóng. Mục đích là đưa ra các kết quả về sự tồn tại nghiệm cùng với tính ổn định của nghiệm tích phân đối với bài toán trên bằng phương pháp điểm bất động.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số 1 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm đối với bài toán sau:

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u(t), u_t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{2.1}$$

$$u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), k \in \Lambda, \tag{2.2}$$

$$u(\bar{s}) + g(u)(\bar{s}) = \varphi(\bar{s}), \bar{s} \in [-h, 0], \tag{2.3}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính đóng và không bị chặn, f là hàm phi tuyến xác định trên $[0, +\infty) \times X \times C([-h, 0]; X)$, $g : \mathcal{PC}([-h, T]; X) \to C([-h, 0]; X)$ là hàm không cục bộ và hàm xung cho bởi $I_k : X \to X$. Chúng tôi xét bài toán trên với $\alpha \in (1, 2)$ và $\Lambda \subset \mathbb{N}$ là một tập chỉ số. Kí hiệu $u(t_k^+)$ và $u(t_k^-)$ tương ứng là giới hạn phải và giới hạn trái của u tại t_k; u_t là quá khứ của hàm trạng thái tính tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(\bar{s}) = u(t + \bar{s}), \bar{s} \in [-h, 0]$.

2.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TÍCH PHÂN

Kí hiệu χ_h là độ đo không compact trong không gian $\mathcal{C}_h := C([-h, 0]; X)$. Cho trước $T > 0$, $\mathcal{PC}([-h, T]; X)$ là không gian các hàm $u : [-h, T] \to X$

sao cho u liên tục trên $[-h,T]\backslash\{t_k : k \in \Lambda\}$ và với mỗi $t_k, k \in \Lambda$, tồn tại

$$u(t_k^-) = \lim_{t\to t_k^-} u(t); \quad u(t_k^+) = \lim_{t\to t_k^+} u(t)$$

và $u(t_k) = u(t_k^-)$. Khi đó $\mathcal{PC}([-h,T];X)$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\|u\|_{\mathcal{PC}} := \sup_{t\in[-h,T]} \|u(t)\|.$$

Độ đo không compact Hausdorff trên không gian $\mathcal{PC}([-h,T];X)$ được kí hiệu là $\chi_{\mathcal{PC}}$.

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3), chúng tôi đưa ra các giả thiết sau.

(**A**) *A là toán tử quạt kiểu (ω,θ) với $0 \le \theta < \pi(1-\alpha/2)$, sao cho α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn.*

(**F**) *Hàm phi tuyến $f : \mathbb{R}^+ \times X \times \mathcal{C}_h \to X$ thỏa mãn:*

(1) *$f(\cdot,v,w)$ đo được với mỗi cặp $(v,w) \in X \times \mathcal{C}_h$, $f(t,\cdot,\cdot)$ liên tục với hầu khắp $t \in [0,T]$ và*

$$\|f(t,v,w)\|_X \le k(t)\Psi_f(\|v\|_X + \|w\|_{\mathcal{C}_h}),$$

$\forall (v,w) \in X \times \mathcal{C}_h$, ở đây $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, Ψ_f là hàm giá trị thực liên tục, không giảm;

(2) *tồn tại hàm $m : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho $m(t,\cdot) \in L^1(0,t), t > 0$, và với mọi tập con bị chặn $V \subset X, W \subset \mathcal{C}_h$,*

$$\chi(S_\alpha(t-s)f(s,V,W)) \le m(t,s)[\chi(V) + \chi_h(W)],$$

hầu khắp $t,s \in [0,T], s \le t$.

(**I**) *Hàm xung $I_k : X \to X, k \in \Lambda$, thỏa mãn:*

(1) *I_k liên tục và tồn tại số $l_k \ge 0$ thỏa mãn*

$$\|I_k(x)\| \le l_k\Psi_I(\|x\|),$$

ở đây Ψ_I là hàm giá trị thực liên tục, không giảm;

(2) *tồn tại số $\mu_k \ge 0$, sao cho*

$$\chi(I_k(V) \le \mu_k\chi(V),$$

với mọi tập bị chặn $V \subset X$.

(**G**) *Hàm không cục bộ* $g : \mathcal{PC}([-h,T];X) \to \mathcal{C}_h$ *thỏa mãn các điều kiện:*

(1) g *liên tục và*

$$\|g(u)\|_{\mathcal{C}_h} \leq \Psi_g(\|u\|_{\mathcal{PC}}),$$

$\forall u \in \mathcal{PC}$, *ở đây* Ψ_g *là hàm liên tục, không giảm trên* $\mathbb{R}^+$*;*

(2) *tồn tại* $\eta \geq 0$, *sao cho với mọi tập bị chặn* $D \subset \mathcal{PC}([-h,T];X)$,

$$\chi_h(g(D)) \leq \eta\chi_{\mathcal{PC}}(D).$$

Nhận xét 2.1. *Liên quan đến các giả thiết* (**F**)(2), (**I**)(2) *và* (**G**)(2), *ta có một số nhận xét sau.*

(1) *Nếu trễ của hệ là trễ hằng* ($u_t(s) = u(t-\tau)$ *với mọi* $s \in [-h,0]$) *và* $f(t,\cdot,\cdot)$ *thỏa mãn điều kiện Lipschitz, nghĩa là*

$$\|f(t,v_1,w_1) - f(t,v_2,w_2)\|_X \leq k_f(t)(\|v_1 - v_2\|_X + \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{C}_h}),$$

$k_f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$, *thì* (**F**)(2) *thỏa mãn với* $m(t,s) = \|S_\alpha(t-s)\|k_f(s)$. *Mặt khác, nếu* $S_\alpha(t), t > 0$, *compact hoặc* $f(t,\cdot,\cdot)$ *compact (với mỗi* t *cố định) thì* (**F**)(2) *rõ ràng được thỏa mãn với* $m = 0$.

(2) *Tương tự với* (**I**)(2), *nếu* I_k *Lipschitz, tức là*

$$\|I_k(x) - I_k(y)\| \leq \mu_k\|x-y\|, \forall x,y \in X$$

thì (**I**)(2) *thỏa mãn. Hiển nhiên,* (**I**)(2)*cũng thỏa mãn với* $\mu_k = 0$ *nếu* I_k *compact.*

(3) *Đối với giả thiết* (**G**)(2), *nếu* g *Lipschitz, nghĩa là*

$$\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{C}_h} \leq \eta\|u-v\|_{\mathcal{PC}},$$

thì (**G**)(2) *thỏa mãn. Điều kiện này cũng thỏa mãn với* $\eta = 0$ *nếu* g *compact.*

Sau đây chúng tôi sử dụng phép biến đổi Laplace để đưa ra công thức biểu diễn nghiệm tích phân cho bài toán (2.1)-(2.3). Kí hiệu $\mathcal{L}$ là biến đổi Laplace của hàm lấy giá trị trong X xác định trên $\mathbb{R}^+$. Đặt $\eta(t) = f(t,u(t),u_t)$ và áp dụng biến đổi Laplace cho (2.1), (2.2) ta được:

$$\lambda\mathcal{L}[u](\lambda) - u(0) - \sum_{k\in\Lambda} e^{-\lambda t_k} I_k = \frac{1}{\lambda^{\alpha-1}} A\mathcal{L}[u](\lambda) + \mathcal{L}[\eta](\lambda).$$

Khi đó

$$(\lambda^\alpha I - A)\mathcal{L}[u](\lambda) = \lambda^{\alpha-1}u(0) + \sum_{k\in\Lambda} e^{-\lambda t_k}\lambda^{\alpha-1} I_k + \lambda^{\alpha-1}\mathcal{L}[\eta](\lambda).$$

Vì vậy

$$\mathcal{L}[u](\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}u(0) + \sum_{k\in\Lambda} e^{-\lambda t_k}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}I_k + \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathcal{L}[\eta](\lambda),$$

với mọi λ thỏa mãn $\mathrm{Re}\lambda > 0, \lambda^\alpha \in \rho(A)$ (tập giải của A). Giả sử, $S_\alpha(\cdot)$ là một α-giải thức sinh bởi A, khi đó

$$\mathcal{L}[u](\lambda) = \mathcal{L}[S_\alpha](\lambda)u(0) + \sum_{k\in\Lambda} e^{-\lambda t_k}\mathcal{L}[S_\alpha](\lambda)I_k + \mathcal{L}[S_\alpha](\lambda)\mathcal{L}[\eta](\lambda). \quad (2.4)$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace ngược cho phương trình (2.4), thu được

$$u(t) = S_\alpha(t)u(0) + \sum_{0<t_k\le t} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k)) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s),u_s)ds, t \ge 0. \quad (2.5)$$

Nhờ (2.5), nghiệm tích phân của bài toán (2.1)-(2.3) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1. Hàm $u \in \mathcal{PC}([-h,T];X)$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (2.1)-(2.3) trên đoạn $[-h,T]$ nếu $u(t) = \varphi(t) - g(u)(t)$, $t \in [-h,0]$ và

$$u(t) = S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k)) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s),u_s)ds,$$

với mỗi $t \in (0,T]$.

Xét $\mathcal{F} : \mathcal{PC}([-h,T];X) \to \mathcal{PC}([-h,T];X)$, xác định bởi

$$\mathcal{F}(u)(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(u)(t), & t \in [-h,0], \\ S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k)) \\ \qquad + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s),u_s)ds, & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Khi đó, u là một nghiệm tích phân của (2.1)-(2.3) nếu nó là một điểm bất động của *toán tử nghiệm* $\mathcal{F}$.

Sử dụng các giả thiết về tính liên tục của f, g, I_k và định lí hội tụ trội Lebesgue ta có $\mathcal{F}$ là một ánh xạ liên tục trên $\mathcal{PC}([-h,T];X)$. Sau đây ta chứng minh tính nén của toán tử nghiệm.

Bổ đề 2.1. *Với các giả thiết* (**A**), (**F**), (**G**) *và* (**I**). *Khi đó*

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}(D)) \leq \Big[\Big(\eta + \sum_{t_k \in [0,T]} \mu_k\Big) S_\alpha^T + 8 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds\Big] \chi_{\mathcal{PC}}(D),$$

với mọi tập bị chặn $D \subset \mathcal{PC}([-h,T];X)$, *ở đây* $S_\alpha^T = \sup_{t\in[0,T]} \|S_\alpha(t)\|$.

Chứng minh. Cho tập bị chặn $D \subset \mathcal{PC}([-h,T];X)$. Ta có

$$\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}_1(D) + \mathcal{F}_2(D) + \mathcal{F}_3(D),$$

với

$$\mathcal{F}_1(u)(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)], & t \in [0,T], \\ \varphi(t) - g(u)(t), & t \in [-h,0]; \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_2(u)(t) = \begin{cases} \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k) I_k(u(t_k)), & t \in [0,T], \\ 0, & t \in [-h,0]; \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_3(u)(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t S_\alpha(t-s) f(s,u(s),u_s)ds, & t \in [0,T], \\ 0, & t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Do tính chất nửa cộng tính đại số của $\chi_{\mathcal{PC}}$, ta có

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}(D)) \leq \chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_1(D)) + \chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_2(D)) + \chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_3(D)).$$

Lấy $z_1, z_2 \in \mathcal{F}_1(D)$, tồn tại $u_1, u_2 \in D$ sao cho

$$z_1(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u_1)(0)], & t \in [0,T], \\ \varphi(t) - g(u_1)(t), & t \in [-h,0] \end{cases}$$

$$z_2(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u_2)(0)], & t \in [0,T], \\ \varphi(t) - g(u_2)(t), & t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Suy ra

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| \leq \begin{cases} \|S_\alpha(t)\| \|g(u_1) - g(u_2)\|_{\mathcal{C}_h}, & t \in [0,T], \\ \|g(u_1) - g(u_2)\|_{\mathcal{C}_h}, & t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Do đó

$$\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{PC}} \leq S_\alpha^T \|g(u_1) - g(u_2)\|_{\mathcal{C}_h},$$

lưu ý rằng $S_\alpha^T \geq 1$. Điều này dẫn đến

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_1(D)) \leq S_\alpha^T \chi_h(g(D)).$$

Sử dụng giả thiết **(G)**(2), ta có

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_1(D)) \leq \eta S_\alpha^T \chi_{\mathcal{PC}}(D). \tag{2.6}$$

Với $z_1, z_2 \in \mathcal{F}_2(D)$, có thể tìm được $u_1, u_2 \in D$, sao cho

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| = \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)[I_k(u_1(t_k)) - I_k(u_2(t_k))].$$

Vì thế

$$\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{P}C} \leq S_\alpha^T \sum_{t_k \in [0,T]} \|I_k(u_1(t_k)) - I_k(u_2(t_k))\|.$$

Bất đẳng thức này dẫn đến

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{P}C}(\mathcal{F}_2(D)) &\leq S_\alpha^T \sum_{t_k \in [0,T]} \chi(I_k(D(t_k))) \\
&\leq S_\alpha^T \sum_{t_k \in [0,T]} \mu_k \chi(D(t_k)) \\
&\leq \Big(S_\alpha^T \sum_{t_k \in [0,T]} \mu_k\Big) \chi_{\mathcal{P}C}(D),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

theo giả thiết (**I**)(2).

Đối với $\mathcal{F}_3(D)$, cho $\epsilon > 0$, có thể chọn được dãy $\{u_n\} \subset D$, để

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_3(D)) \leq 2\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_3(\{u_n\})) + \epsilon. \tag{2.8}$$

Nhờ giả thiết (**A**), ta thấy rằng $\Phi(t,s) = S_\alpha(t-s)$ thỏa mãn $(\Phi 1) - (\Phi 2)$ trong Bổ đề 1.3. Do đó, $\mathcal{F}_3(\{u_n\})$ là tập đồng liên tục trong $C([0,T];X)$. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{P}C}(\mathcal{F}_3(\{u_n\})) &= \sup_{t\in[0,T]} \chi(\mathcal{F}_3(\{u_n\})(t)) \\
&\leq 2 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \chi\big(S_\alpha(t-s) f(s, u_n(s), (u_n)_s)\big) ds \\
&\leq 2 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)[\chi(\{u_n(s)\}) + \sup_{\tau\in[-h,0]} \chi(\{u_n(s+\tau)\})] ds \\
&\leq 4\chi_{\mathcal{P}C}(\{u_n\}) \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s) ds
\end{aligned}$$

$$\leq 4\chi_{\mathcal{PC}}(D) \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds,$$

ở đây chúng tôi sử dụng Mệnh đề 1.5. Từ bất đẳng thức (2.8), suy ra

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_3(D)) \leq 8\chi_{\mathcal{PC}}(D) \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds, \tag{2.9}$$

vì $\epsilon > 0$ bé tùy ý.
Kết hợp (2.6), (2.7) và (2.9), ta có

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}(D)) \leq \left[\eta S_\alpha^T + S_\alpha^T \sum_{t_k\in[0,T]} \mu_k + 8 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds\right] \chi_{\mathcal{PC}}(D).$$

□

Định lí 2.1. *Nếu các giả thiết trong Bổ đề 2.1 được thỏa mãn thì bài toán* (2.1)-(2.3) *có ít nhất một nghiệm tích phân trong* $\mathcal{PC}([-h,T];X)$*, với điều kiện*

$$\Big(\eta + \sum_{t_k\in[0,T]} \mu_k\Big) S_\alpha^T + 8 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds < 1, \tag{2.10}$$

và

$$\begin{aligned} \liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\Bigg[\Big(\Psi_g(r) + \Psi_I(r) \sum_{t_k\in[0,T]} l_k\Big) S_\alpha^T \\ + \Psi_f(2r) \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| k(s)ds\Bigg] < 1, \end{aligned} \tag{2.11}$$

ở đây S_α^T *đã được cho trong Bổ đề 2.1.*

Chứng minh. Nhờ (2.10), sử dụng Bổ đề 2.1 ta thu được tính nén của toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ theo độ đo $\chi_{\mathcal{PC}}$. Thực vậy, cho $D \subset \mathcal{PC}([-h,T];X)$ là một tập đóng, bị chặn thỏa mãn $\chi_{\mathcal{PC}}(D) \leq \chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}(D))$. Khi đó, theo Bổ đề 2.1, ta có

$$\chi_{\mathcal{PC}}(D) \leq \chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}(D)) \leq \ell\, \chi_{\mathcal{PC}}(D),$$

với

$$\ell = \Big(\eta + \sum_{t_k\in[0,T]} \mu_k\Big) S_\alpha^T + 8 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds < 1.$$

Điều này có nghĩa là $\chi_{\mathcal{PC}}(D) = 0$. Vì $\chi_{\mathcal{PC}}$ là một độ đo không compact chính qui, nên D là một tập compact tương đối.

Để áp dụng Định lí 1.9, ta cần chỉ ra rằng tồn tại $R > 0$ sao cho $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$, ở đây B_R là hình cầu đóng trong $\mathcal{PC}([-h,T];X)$ tâm tại 0 với bán kính R.
Giả sử ngược lại rằng, tồn tại dãy $\{v_n\} \subset \mathcal{PC}([-h,T];X)$ sao cho $\|v_n\|_{\mathcal{PC}} \leq n$ nhưng $\|\mathcal{F}(v_n)\|_{\mathcal{PC}} > n$. Từ công thức của $\mathcal{F}$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(v_n)(t)\|_X &\leq \sup_{t\in[0,T]} \|S_\alpha(t)\| \Big(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \Psi_g(\|v_n\|_{\mathcal{PC}}) + \sum_{t_k\in[0,T]} \|I_k(v_n(t_k))\| \Big) \\
&\quad + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \|f(s, v_n(s), (v_n)_s)\| ds \\
&\leq S_\alpha^T \Big(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \Psi_g(n) + \sum_{t_k\in[0,T]} l_k \Psi_I(\|v_n(t_k)\|) \Big) \\
&\quad + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) \Psi_f(\|v_n(s)\| + \|(v_n)_s\|_{\mathcal{C}_h}) ds \\
&\leq S_\alpha^T \Big(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \Psi_g(n) + \Psi_I(n) \sum_{t_k\in[0,T]} l_k \Big) \\
&\quad + \Psi_f(2n) \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) ds.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
n < \|\mathcal{F}(v_n)\|_{\mathcal{PC}} &\leq S_\alpha^T \Big(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \Psi_g(n) + \Psi_I(n) \sum_{t_k\in[0,T]} l_k \Big) \\
&\quad + \Psi_f(2n) \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) ds.
\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned}
1 < \frac{1}{n} \|\mathcal{F}(v_n)\|_{\mathcal{PC}} &\leq \frac{1}{n} \Big[S_\alpha^T \Big(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \Psi_g(n) + \Psi_I(n) \sum_{t_k\in[0,T]} l_k \Big) \\
&\quad + \Psi_f(2n) \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) ds \Big].
\end{aligned}$$

Qua giới hạn bất đẳng cuối cùng khi $n \to +\infty$, ta thấy mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. □

2.3. TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM

Nhằm nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3), chúng tôi xét không gian hàm

$$\mathcal{PC}_0 = \{u \in \mathcal{PC}([-h, +\infty); X) : \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0\}$$

với chuẩn

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|,$$

ở đây $\mathcal{PC}([-h, +\infty); X)$ được định nghĩa tương tự như $\mathcal{PC}([-h, T]; X)$ với $T = +\infty$. Khi đó, $\mathcal{PC}_0$ là một không gian Banach.

Ở phần này, ta thay thế các giả thiết (**A**), (**F**), (**G**) và (**I**) bởi các giả thiết sau:

(**Aa**) *A là toán tử quạt kiểu (ω, θ), $\omega < 0$ và $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$.*

(**Fa**) *$f(\cdot, v, w)$ đo được với mỗi $v \in X, w \in \mathcal{C}_h$, $f(t, \cdot, \cdot)$ liên tục với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t, 0, 0) = 0$, và tồn tại $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$, để*

$$\|f(t, v_1, w_1) - f(t, v_2, w_2)\| \leq k(t)(\|v_1 - v_2\| + \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{C}_h}), t \in \mathbb{R}^+,$$

$\forall v_1, v_2 \in X, w_1, w_2 \in \mathcal{C}_h$.

(**Ga**) *g là một hàm liên tục thỏa mãn $g(0) = 0$ và tồn tại số η không âm sao cho*

$$\|g(w_1) - g(w_2)\|_{\mathcal{C}_h} \leq \eta\|w_1 - w_2\|_{\mathcal{PC}},$$

$\forall w_1, w_2 \in \mathcal{PC}([-h, T]; X)$, *với mọi $T > 0$.*

(**Ia**) *Các hàm $I_k, k \in \Lambda$ liên tục, $I_k(0) = 0$ và tồn tại dãy $\{\mu_k\}, k \in \Lambda$ sao cho $\sum_{k\in\Lambda} \mu_k < +\infty$, và*

$$\|I_k(x) - I_k(y)\| \leq \mu_k\|x - y\|, \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Định lí 2.2. *Giả sử* (**Aa**), (**Fa**), (**Ga**) *và* (**Ia**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (2.1)-(2.3) *có nghiệm duy nhất $u \in \mathcal{PC}_0$, với điều kiện*

$$\Big(\eta + \sum_{k\in\Lambda} \mu_k\Big) S_\alpha^\infty + 2\sup_{t\geq 0} \int_0^t \|S_\alpha(t - s)\|k(s)ds < 1, \tag{2.12}$$

ở đây $S_\alpha^\infty = \sup_{t\geq 0} \|S_\alpha(t)\|$.

Chứng minh. Trong tình huống này, để áp dụng dụng nguyên lí ánh xạ co chúng tôi sẽ chỉ ra rằng toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ là ánh xạ từ $\mathcal{PC}_0$ vào chính nó, và chứng minh $\mathcal{F}$ là một ánh xạ co. Nhắc lại rằng

$$\mathcal{F}(u)(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t - t_k)I_k(u(t_k)) \\ \qquad\qquad + \int_0^t S_\alpha(t - s)f(s, u(s), u_s)ds, t > 0, \\ \varphi(t) - g(u)(t),\ t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Lấy $u \in \mathcal{PC}_0$, sao cho $R = \|u\|_\infty > 0$. Trước hết, ta chứng minh $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{PC}_0$, nghĩa là, $\mathcal{F}(u)(t) \to 0$, khi $t \to +\infty$.
Với $\epsilon > 0$ cho trước. Tồn tại $T_1 > 0$ để

$$\|u(t)\| \leq \epsilon, \forall t > T_1, \tag{2.13}$$

$$\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} = \sup_{\tau \in [-h,0]} \|u(t+\tau)\| \leq \epsilon, \forall t > T_1 + h. \tag{2.14}$$

Mặt khác, từ giả thiết $\sum_{k \in \Lambda} \mu_k < +\infty$, tồn tại $N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sum_{k > N_0} \mu_k \leq \epsilon.$$

Khi đó, với $t > 0$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(u)(t)\| &\leq \|S_\alpha(t)\|(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \|g(u)\|_{\mathcal{C}_h}) \\
&\quad + \sum_{k \leq N_0} \|S_\alpha(t-t_k)\| \, \|I_k(u(t_k))\| \\
&\quad + \sum_{k > N_0} \|S_\alpha(t-t_k)\| \, \|I_k(u(t_k))\| \\
&\quad + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, \|f(s,u(s),u_s)\| ds \\
&\leq \|S_\alpha(t)\|(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \eta R) \\
&\quad + R \sum_{k \leq N_0} \|S_\alpha(t-t_k)\| \, \mu_k + R S_\alpha^\infty \sum_{k > N_0} \mu_k \\
&\quad + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) \, (\|u(s)\| + \|u_s\|_{\mathcal{C}_h}) ds \\
&= E_1(t) + E_2(t) + E_3(t),
\end{aligned}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
E_1(t) &= \|S_\alpha(t)\|(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \eta R), \\
E_2(t) &= R \sum_{k \leq N_0} \|S_\alpha(t-t_k)\| \, \mu_k + R S_\alpha^\infty \sum_{k > N_0} \mu_k, \\
E_3(t) &= \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) \, (\|u(s)\| + \|u_s\|_{\mathcal{C}_h}) ds.
\end{aligned}$$

Theo Định lí 1.4, tồn tại $T_2 > 0$ sao cho

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \epsilon, \forall t > T_2.$$

Vì vậy

$$E_1(t) \leq (1+\eta) R \epsilon, \ \forall t > T_2. \tag{2.15}$$

Thêm nữa,

$$E_2(t) \leq \Big(\sum_{k \leq N_0} \mu_k + S_\alpha^\infty \Big) R\epsilon, \ \forall t > T_2 + t_{N_0}. \tag{2.16}$$

Đối với $E_3(t)$, khi $t > T_1 + h$, ta có

$$\begin{aligned} E_3(t) &= \Big(\int_0^{T_1+h} + \int_{T_1+h}^t \Big) \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) \, (\|u(s)\| + \|u_s\|_{\mathcal{C}_h}) ds \\ &\leq 2R \int_0^{T_1+h} \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) ds + 2\epsilon \int_{T_1+h}^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) ds, \end{aligned}$$

nhờ các đánh giá (2.13)và (2.14). Do đó,

$$E_3(t) \leq 2R\epsilon \int_0^{T_1+h} k(s) ds + 2\epsilon \int_{T_1+h}^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) ds,$$

với mọi $t > T_2 + T_1 + h$. Sử dụng (2.12), ta thấy rằng

$$2 \int_{T_1+h}^t \|S_\alpha(t-s)\| \, k(s) ds < 1.$$

Vì vậy

$$E_3(t) \leq (2R\|k\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + 1)\epsilon, \tag{2.17}$$

với mọi $t > T_2 + T_1 + h$. Kết hợp (2.15), (2.16) và (2.17), suy ra

$$\|\mathcal{F}(u)(t)\| \leq C^* \epsilon,$$

$\forall t > \max\{T_2 + T_1 + h, T_2 + t_{N_0}\}$, ở đây

$$C^* = (1+\eta)R + \Big(\sum_{k \in \Lambda} \mu_k + S_\alpha^\infty \Big) R + 2R\|k\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + 1.$$

Điều này chứng tỏ rằng $\mathcal{F}(\mathcal{PC}_0) \subset \mathcal{PC}_0$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\mathcal{F}$ là một ánh xạ co. Lấy $u, v \in \mathcal{PC}_0$, nhờ các giả thiết (**Fa**), (**Ga**) và (**Ia**), khi đó

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u)(t) - \mathcal{F}(v)(t)\| &\leq \|S_\alpha(t)\| \, \|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{C}_h} \\ &\quad + \sum_{0<t_k<t} \|S_\alpha(t-t_k)\| \, \|I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k))\| \\ &\quad + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \, \|f(s,u(s),u_s) - f(s,v(s),v_s)\| ds \\ &\leq S_\alpha^\infty \eta \|u-v\|_\infty + \Big(S_\alpha^\infty \sum_{0<t_k<t} \mu_k \Big) \|u-v\|_\infty \end{aligned}$$

$$+\Big(2\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\, k(s)ds\Big)\|u-v\|_\infty.$$

Do vậy

$$\|\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(v)\|_\infty \le \ell\|u-v\|_\infty,$$

ở đây

$$\ell = \Big(\eta+\sum_{k\in\Lambda}\mu_k\Big)S_\alpha^\infty + 2\sup_{t\ge 0}\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|k(s)ds < 1.$$

□

2.4. ÁP DỤNG

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền bị chặn với biên trơn $\partial\Omega$. Xét hệ sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} L_x u(x,s)ds + k(t)\tilde{f}(x,u(x,t),u(x,t-h)), \tag{2.18}$$

$$\alpha\in(1,2), t\in\mathbb{R}^+\backslash\{t_k, k\in\Lambda\}, x\in\Omega,$$

$$u(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega, t\in\mathbb{R}^+, \tag{2.19}$$

$$u(x,t_k^+) = u(x,t_k) + \tilde{I}_k(x,u(x,t_k)), x\in\Omega, k\in\Lambda, \tag{2.20}$$

$$u(x,s) + \sum_{i=1}^M c_i u(x,\tau_i+s) = \varphi(s), s\in[-h,0], x\in\Omega, \tag{2.21}$$

ở đây toán tử

$$L_x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

có tính chất

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

với $\theta>0$. Đặt $X=L^2(\Omega), A=L_x$ và $D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Khi đó, hệ (2.18)-(2.21) là một trường hợp riêng của mô hình trừu tượng (2.1)-(2.3) với

$$f(t,v,w)(x) = k(t)\tilde{f}(x,v(x),w(x,-h)), v\in X, w\in C([-h,0];X),$$
$$I_k(v)(x) = \tilde{I}_k(x,v(x)), v\in X,$$
$$g(u)(s)(x) = \sum_{i=1}^M c_i u(x,\tau_i+s), u\in\mathcal{PC}([-h,+\infty);X).$$

Ta biết rằng, A là một toán tử quạt và nó sinh ra một nửa nhóm giải tích trong X (xem [61]). Hơn nữa, có thể kiểm tra được A là một toán tử quạt kiểu $(\lambda_1, 0)$ ở đây $\lambda_1 < 0$ là giá trị riêng đầu tiên của A.

Giả sử rằng $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$ và $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sao cho

$$|\tilde{f}(x, y_1, z_1) - \tilde{f}(x, y_2, z_2)| \leq \kappa(x)(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), \kappa \in X,$$

$\forall x \in \Omega, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \|f(t, v_1, w_1) - f(t, v_2, w_2)\| &\leq k(t)\|\kappa\|(\|v_1 - v_2\| \\ &\quad + \|w_1(\cdot, -h) - w_2(\cdot, -h)\|) \\ &\leq k(t)\|\kappa\|(\|v_1 - v_2\| + \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{C}_h}), \end{aligned}$$

$\forall v_1, v_2 \in X, w_1, w_2 \in \mathcal{C}_h$.

Cho $\tilde{I}_k : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k \in \Lambda$ là hàm thỏa mãn

$$|\tilde{I}_k(x, y_1) - \tilde{I}_k(x, y_2)| \leq \ell_k(x)|y_1 - y_2|, \ell_k \in X,$$

$\forall x \in \Omega, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\|I_k(v_1) - I_k(v_2)\| \leq \|\ell_k\| \, \|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in X.$$

Đối với hàm không cục bộ g, rõ ràng

$$\|g(u_1) - g(u_2)\|_{\mathcal{C}_h} \leq \Big(\sum_{i=1}^{M} c_i\Big)\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{P}C},$$

với mọi $u_1, u_2 \in \mathcal{PC}([-h, T]; X), \forall T > 0$.

Dưới các thiết lập trên, áp dụng Định lí 2.2, ta thấy bài toán (2.18)-(2.21) có duy nhất nghiệm tích phân trên $\mathcal{PC}_0$, với điều kiện

$$\Big(\sum_{i=1}^{M} c_i + \sum_{k \in \Lambda} \|\ell_k\|\Big) S_\alpha^\infty + 2\|\kappa\| \sup_{t \geq 0} \int_0^t \|S_\alpha(t - s)\| k(s) ds < 1.$$

Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình tán xạ-sóng nửa tuyến tính chứa xung và trễ hữu hạn trong không gian Banach. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục đối với bài toán (Định lí 2.1).

2) Chứng minh được tính ổn định của nghiệm đối với bài toán (2.1)-(2.3) (Định lí 2.2).

3) Bài toán minh họa cho các kết quả lí thuyết được đưa ra ở Mục 2.4.

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm toàn cục chúng tôi sử dụng các điều kiện về độ đo không compact. Lưu ý rằng, điều kiện về độ đo không compact là một sự cải tiến của điều kiện Lipschitz. Về phương diện kĩ thuật, sự xuất hiện của điều kiện không cục bộ và điều kiện xung làm cho việc chỉ ra sự tồn tại hình cầu bất biến đối với toán tử nghiệm là tương đối khó. Hơn nữa, điều kiện xung còn ảnh hưởng đến việc đánh giá tốc độ phân rã của nghiệm. Các kết quả đạt được trong chương này tổng quát hơn so với các kết quả đã công bố trong [1, 15, 16].

Chương 3

TÍNH ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN YẾU CỦA NGHIỆM BAO HÀM THỨC VI PHÂN DẠNG TÁN XẠ-SÓNG VỚI TRỄ VÔ HẠN

Chương này nghiên cứu bài toán Cauchy với bao hàm thức vi tích phân dạng tán xạ-sóng chứa trễ vô hạn. Dựa trên dáng điệu của toán tử giải thức sinh bởi phần tuyến tính, chúng tôi thiết lập các ước lượng cho nghiệm của bài toán. Kết quả về tính ổn định yếu của nghiệm *không*, được chứng minh trong trường hợp toán tử giải thức ổn định tiệm cận.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số 2 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét bài toán

$$u'(t) \in \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + F(t, u_t), t > 0, \tag{3.1}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{3.2}$$

trong đó hàm chưa biết u nhận giá trị trong không gian Banach $(X, \|\cdot\|)$, A là toán tử tuyến tính đóng và không bị chặn, F là một ánh xạ đa trị xác định trên $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ là không gian pha được định nghĩa trong Chương 1. Ở đây $\alpha \in (1, 2)$ và u_t là quá khứ của hàm trạng thái cho tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(s) = u(t+s), s \leq 0$.

3.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM BỊ CHẶN MŨ

Giả sử $g : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty)$ là một hàm liên tục và không giảm. Trong mục này, ta giả thiết:

($\mathbf{A}^\sharp$) A là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $\omega \geq 0$ và $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, sao cho α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn.

($\mathbf{B}^\sharp$) $\mathcal{B}$ là không gian pha trong Định nghĩa 1.26, với K và $\frac{M}{g}$ là các hàm bị chặn đều.

($\mathbf{F}^\sharp$) Ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ thỏa mãn:

(1) với $\psi \in \mathcal{B}$ ánh xạ đa trị $F(\cdot, \psi) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{K}v(X)$ có một hàm chọn đo được mạnh địa phương, nghĩa là với mỗi $T > 0$ có thể tìm được một hàm đo được mạnh $f : [0, T] \to X$ sao cho $f(t) \in F(t, \psi)$ với hầu khắp $t \in [0, T]$;

(2) với hầu khắp t $\in \mathbb{R}^+$, ánh xạ đa trị $F(t, \cdot) : \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ là nửa liên tục trên;

(3) tồn tại các hàm không âm m, p sao cho $m, \frac{p}{g} \in L^1(\mathbb{R}^+)$, và với mọi $\psi \in \mathcal{B}$, ta có

$$\|F(t, \psi)\| := \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(t, \psi)\} \leq m(t)|\psi|_{\mathcal{B}} + p(t)$$

với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$;

(4) tồn tại hàm $k \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ sao cho, với mọi tập bị chặn $D \subset \mathcal{B}$ ta có $\chi(F(t, D)) \leq k(t) \sup\limits_{s \leq 0} \chi(D(s))$ với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$.

Sử dụng bất đẳng thức (1.4), do giả thiết ($\mathbf{A}$), ta có

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \hat{C}(1 + \omega t^\alpha)e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} t}, \forall t \geq 0.$$

Xét không gian hàm

$$C_g(\mathbb{R}^+; X) = \{u \in C([0, +\infty); X) : \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{g(t)} = 0\} \tag{3.3}$$

với chuẩn

$$\|u\|_g = \sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|}{g(t)}.$$

Dễ thấy rằng $C_g(\mathbb{R}^+; X)$ là một không gian Banach. Sau đây, ta định nghĩa một độ đo không compact trên không gian này. Sử dụng toán tử $\pi_T : C_g(\mathbb{R}^+; X) \to C([0, T]; X)$ định nghĩa bởi $\pi_T(u) = u|_{[0,T]}$. Cho Ω là một tập bị chặn trong $C_g(\mathbb{R}^+; X)$. Đặt

$$\chi_\infty(\Omega) = \sup_{T > 0} \omega_T(\pi_T(\Omega)) + \sup_{T > 0} \mathrm{mod}_T(\pi_T(\Omega)), \tag{3.4}$$

$$d_\infty(\Omega) = \lim_{T \to +\infty} \sup_{u \in \Omega} \sup_{t \geq T} \frac{\|u(t)\|}{g(t)}, \tag{3.5}$$

$$\chi^*(\Omega) = \chi_\infty(\Omega) + d_\infty(\Omega), \tag{3.6}$$

ở đó ω_T và mod_T được cho bởi (1.5) và (1.6) tương ứng. Có thể kiểm tra rằng χ_∞, d_∞ và χ^* là các độ đo không compact đơn điệu, không suy biến

trên $C_g(\mathbb{R}^+; X)$. Bổ đề sau đưa ra một điều kiện đủ cho tính compact của một tập bị chặn trong $C_g(\mathbb{R}^+; X)$.

Bổ đề 3.1. *Cho $\Omega \subset C_g(\mathbb{R}^+; X)$ là một tập bị chặn sao cho $\chi^*(\Omega) = 0$. Khi đó, Ω là compact tương đối trong $C_g(\mathbb{R}^+; X)$.*

Chứng minh. Với $\epsilon > 0$ cho trước. Từ đẳng thức $d_\infty(\Omega) = 0$, ta có thể chọn $T > 0$ sao cho

$$\left\| \frac{u(t)}{g(t)} \right\| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall t \geq T, \forall u \in \Omega. \tag{3.7}$$

Lấy $\{u_n\}$ là một dãy trong Ω. Khi đó, $\chi_\infty(\{u_n\}) = 0$, nghĩa là

$$\omega_T(\pi_T(\{u_n\})) = \mathrm{mod}_T(\pi_T(\{u_n\})) = 0,$$

vì thế $\{u_n|_{[0,T]}\}$ có một dãy con hội tụ trong $C([0,T]; X)$ (vẫn đánh số bởi n). Do đó, tồn tại $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, sao cho

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u_n(t) - u_m(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall n, m \geq N(\epsilon).$$

Theo đó

$$\sup_{t \in [0,T]} \left\| \frac{u_n(t)}{g(t)} - \frac{u_m(t)}{g(t)} \right\| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall n, m \geq N(\epsilon). \tag{3.8}$$

Kết hợp (3.7)-(3.8), ta có

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geq 0} \left\| \frac{u_n(t)}{g(t)} - \frac{u_m(t)}{g(t)} \right\| &\leq \sup_{t \in [0,T]} \left\| \frac{u_n(t)}{g(t)} - \frac{u_m(t)}{g(t)} \right\| + \sup_{t \geq T} \left\| \frac{u_n(t)}{g(t)} - \frac{u_m(t)}{g(t)} \right\| \\
&\leq \sup_{t \in [0,T]} \left\| \frac{u_n(t)}{g(t)} - \frac{u_m(t)}{g(t)} \right\| + \sup_{t \geq T} \left\| \frac{u_n(t)}{g(t)} \right\| \\
&\quad + \sup_{t \geq T} \left\| \frac{u_m(t)}{g(t)} \right\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,
\end{aligned}$$

với mọi $n, m \geq N(\epsilon)$. Do đó, $\{u_n\}$ là một dãy Cauchy trong $C_g(\mathbb{R}^+; X)$. Bổ đề được chứng minh. □

Trong phần này, ta xét không gian $C_g(\mathbb{R}^+; X)$ với $g(t) = e^{\beta t}$ và $\beta > \omega^{\frac{1}{\alpha}}$. Với các thiết lập này, ta có

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)} = 0, \tag{3.9}$$

do Định lí 1.4.

Với $\varphi \in \mathcal{B}$, ta định nghĩa không gian

$$\mathbf{C}_{g,\varphi} = \{u \in C_g(\mathbb{R}^+; X) : u(0) = \varphi(0)\}.$$

Ta có, $\mathbf{C}_{g,\varphi}$ là một không gian con đóng của $C_g(\mathbb{R}^+; X)$. Với mỗi $v \in \mathbf{C}_{g,\varphi}$, ta định nghĩa hàm $v[\varphi] : \mathbb{R} \to X$ như sau

$$v[\varphi](t) = \begin{cases} \varphi(t), & -\infty < t \leq 0, \\ v(t), & t > 0. \end{cases}$$

Rõ ràng

$$v[\varphi]_t(\theta) = \begin{cases} \varphi(t+\theta), & -\infty < \theta < -t, \\ v(t+\theta), & \theta \in [-t, 0]. \end{cases}$$

Với $v \in \mathbf{C}_{g,\varphi}$, đặt

$$\mathcal{P}_F(v) = \left\{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X) : f(t) \in F(t, v[\varphi]_t) \text{ với hầu khắp } t \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Sử dụng giả thiết $(\mathbf{F}^\sharp)(1)$-$(\mathbf{F}^\sharp)(3)$ và các lập luận tương tự trong [29], ta có $\mathcal{P}_F(v) \neq \emptyset$ với mỗi $v \in \mathbf{C}_{g,\varphi}$, nghĩa là ánh xạ đa trị $\mathcal{P}_F$ hoàn toàn xác định.

Lập luận tương tự Định nghĩa 2.1, ta đưa ra định nghĩa nghiệm tích phân của bài toán (3.1)-(3.2) như sau:

Định nghĩa 3.1. Cho trước $\varphi \in \mathcal{B}$. Hàm liên tục $u : \mathbb{R} \to X$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (3.1)-(3.2), nếu tồn tại $f \in \mathcal{P}_F(u|_{\mathbb{R}^+})$, sao cho

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \leq 0, \\ S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, & t > 0. \end{cases}$$

Cho $T > 0$, xét toán tử $\mathcal{W} : L^1(0, T; X) \to C([0, T]; X)$, cho bởi

$$\mathcal{W}(f)(t) = \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, \text{với } f \in L^1(J; X). \tag{3.10}$$

Ta có tính chất sau đối với $\mathcal{W}$.

Mệnh đề 3.1. *Giả sử $S_\alpha(\cdot)$ liên tục theo chuẩn, nghĩa là ánh xạ $t \mapsto S_\alpha(t)$ liên tục trên $(0, +\infty)$. Khi đó, toán tử $\mathcal{W}$ định nghĩa bởi (3.10) biến một tập bị chặn tích phân trong $L^1(0, T; X)$ thành tập đồng liên tục trong $C([0, T]; X)$. Nếu $\{f_n\} \subset L^1(0, T; X)$ là dãy nửa compact thì $\{\mathcal{W}(f_n)\}$ là một tập compact tương đối trong $C([0, T]; X)$. Hơn nữa, nếu $f_n \rightharpoonup f$ trong $L^1(0, T; X)$ thì $\mathcal{W}(f_n) \to \mathcal{W}(f)$ trong $C([0, T]; X)$.*

Chứng minh. Toán tử

$$\Phi(t,s) = S_\alpha(t-s)$$

thỏa mãn các giả thiết của Bổ đề 1.3. Do đó, với mỗi tập bị chặn tích phân $\Omega \subset L^1(0,T;X)$, $\mathcal{W}(\Omega)$ là tập đồng liên tục. Phần còn lại chứng minh tương tự [40, Định lí 5.1.1]. □

Xét toán tử đa trị

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} : \mathbf{C}_{g,\varphi} \to \mathcal{P}(\mathbf{C}_{g,\varphi}),\\
&\mathcal{F}(v)(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \left\{ \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s) ds : f \in \mathcal{P}_F(v) \right\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Rõ ràng rằng nếu v là một điểm bất động của $\mathcal{F}$ thì $v[\varphi]$ là một nghiệm tích phân của (3.1)-(3.2). Ta gọi $\mathcal{F}$ là toán tử nghiệm của (3.1)-(3.2).

Theo công thức của toán tử $\mathcal{W}$ cho bởi (3.10), $\mathcal{F}$ có thể viết lại thành

$$\mathcal{F}(v) = S_\alpha(\cdot)\varphi(0) + \mathcal{W} \circ \mathcal{P}_F(v).$$

Để chứng minh tính đóng của toán tử $\mathcal{F}$, ta cần tính chất sau của $\mathcal{P}_F$.

Bổ đề 3.2. *Giả sử giả thiết* $(\mathbf{F}^\sharp)$ *thỏa mãn. Nếu* $\{v_k\} \subset \mathbf{C}_{g,\varphi}$ *với* $v_k \to v^*$ *và* $f_k \in \mathcal{P}_F(v_k)$ *thì* $f_k \rightharpoonup f^*$ *trong* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;X)$ *với* $f^* \in \mathcal{P}_F(v^*)$.

Chứng minh. Cho $\{v_k\} \subset \mathbf{C}_{g,\varphi}$ sao cho $v_k \to v^*$, $f_k \in \mathcal{P}_F(v_k)$. Ta thấy rằng $\{f_k(t)\} \subset C(t) := F(t, \overline{\{v_k[\varphi]_t\}})$, và $C(t)$ là một tập compact với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$. Cho trước $T > 0$, nhờ giả thiết $(\mathbf{F}^\sharp)(3)$, ta thấy rằng $\{f_k|_{[0,T]}\}$ bị chặn tích phân. Do đó, theo [21, Hệ quả 3.3], $\{f_k\}$ là dãy compact yếu trong $L^1(0,T;X)$. Vì vậy, có thể giả sử rằng $f_k \rightharpoonup f^{1*} \in L^1(0,T;X)$. Theo Bổ đề Mazur [24], tồn tại dãy $\tilde{f}_k \in co\{f_i : i \geq k\}$ sao cho $\tilde{f}_k \to f^{1*}$ trong $L^1(0,T;X)$, và do đó $\tilde{f}_k(t) \to f^{1*}(t)$ với hầu khắp $t \in [0,T]$. Vì F có giá trị compact, nên $F(t,\cdot)$ nửa liên tục trên nghĩa là với $\epsilon > 0$,

$$F(t, v_k[\varphi]_t) \subset F(t, v^*[\varphi]_t) + B_\epsilon$$

với mọi k đủ lớn, ở đây B_ϵ kí hiệu cho hình cầu trong X bán kính ϵ và tâm là gốc tọa độ. Vì vậy,

$$f_k(t) \in F(t, v^*[\varphi]_t) + B_\epsilon,$$

với hầu khắp $t \in [0,T]$. Do tính lồi của $F(t, v^*[\varphi]_t) + B_\epsilon$, ta có phát biểu tương tự cho $\tilde{f}_k(t)$. Cho nên, $f^{1*}(t) \in F(t, v^*[\varphi]_t) + B_\epsilon$ với hầu khắp $t \in [0,T]$. Do ϵ là tùy ý, ta có $f^{1*}(t) \in F(t, v^*[\varphi]_t)$ với hầu khắp $t \in [0,T]$.

Lặp lại lập luận trên với $t \in [(n-1)T, nT], n = 1, 2, ...$ ta thấy rằng $f_k \rightharpoonup f^{n*}$ trong $L^1((n-1)T, nT; X)$ và $f^{n*}(t) \in F(t, v^*[\varphi]_t)$ với hầu khắp $t \in [(n-1)T, nT]$. Định nghĩa hàm $f^* \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ như sau

$$f^*(t) = f^{n*}(t) \text{ nếu } t \in [(n-1)T, nT],$$

ta có được kết luận của Bổ đề. □

Nhờ Bổ đề 3.2, ta có kết quả sau liên quan đến tính đóng của toán tử nghiệm $\mathcal{F}$.

Bổ đề 3.3. *Với giả thiết* $(\mathbf{A}^\sharp)$ *và* $(\mathbf{F}^\sharp)$, $\mathcal{F}$ *là toán tử đóng.*

Chứng minh. Cho $\{v_n\} \subset \mathbf{C}_{g,\varphi}, v_n \to v^*, z_n \in \mathcal{F}(v_n)$ và $z_n \to z^*$. Ta cần chứng minh rằng $z^* \in \mathcal{F}(v^*)$. Thật vậy, lấy $f_n \in \mathcal{P}_F(v_n)$ sao cho

$$z_n(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \mathcal{W}(f_n)(t),\ t > 0, \tag{3.12}$$

với toán tử $\mathcal{W}$ được định nghĩa bởi (3.10). Theo Bổ đề 3.2, ta có thể giả sử rằng $f_n \rightharpoonup f^* \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ và $f^* \in \mathcal{P}_F(v^*)$. Ngoài ra, cho $t \in [0, T]$, khi đó $\{f_n|_{[0,T]}\}$ là dãy nửa compact. Từ Mệnh đề 3.1, ta có $\mathcal{W}(f_n) \to \mathcal{W}(f^*)$ trong $C([0, T]; X)$. Đặc biệt, $\mathcal{W}(f_n)(t) \to \mathcal{W}(f^*)(t)$. Do đó từ (3.12) suy ra

$$z^*(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \mathcal{W}(f^*)(t),$$

với $f^* \in \mathcal{P}_F(v^*)$. Vì vậy, $z^* \in \mathcal{F}(v^*)$.

□

Xét độ đo không compact ω_T định nghĩa bởi (1.5), chọn $L > 0$ sao cho

$$4 \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-L(t-s)} \|S_\alpha(t-s)\| k(s) ds < 1.$$

Bổ đề 3.4. *Giả sử các giả thiết* $(\mathbf{A}^\sharp)$, $(\mathbf{B}^\sharp)$ *và* $(\mathbf{F}^\sharp)$ *thỏa mãn. Khi đó, toán tử nghiệm* $\mathcal{F}$ *là* χ^**-nén.*

Chứng minh. Cho $\Omega \subset \mathbf{C}_{g,\varphi}$ là một tập bị chặn. Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $\chi^*(\mathcal{F}(\Omega)) \geq \chi^*(\Omega)$ thì Ω là tập compact tương đối. Đặt $\Omega_T = \pi_T(\Omega)$ và $\Theta_T = \pi_T(\mathcal{F}(\Omega))$. Khi đó, theo công thức của $\mathcal{F}$, ta có

$$\begin{aligned}\chi(\Theta_T(t)) &= \chi\left(S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)\mathcal{P}_F(\Omega)(s)ds\right)\\ &\leq \chi\left(\int_0^t S_\alpha(t-s)\mathcal{P}_F(\Omega)(s)ds\right)\end{aligned}$$

$$\leq 4\int_0^t \chi\left(S_\alpha(t-s)\mathcal{P}_F(\Omega)(s)\right)ds, \tag{3.13}$$

theo Mệnh đề 1.5. Sử dụng giả thiết $(\mathbf{F}^\sharp)(4)$, ta có

$$\begin{aligned}\chi\left(S_\alpha(t-s)\mathcal{P}_F(\Omega)(s)\right) &\leq \|S_\alpha(t-s)\|\,\chi\left(F(s,\Omega[\varphi]_s)\right)\\ &\leq \|S_\alpha(t-s)\|k(s)\sup_{\theta\leq 0}\chi\left(\Omega[\varphi](s+\theta)\right)\\ &\leq \|S_\alpha(t-s)\|k(s)\sup_{0\leq r\leq s}\chi\left(\Omega(r)\right),\end{aligned}$$

với chú ý $\Omega[\varphi](s+\theta)=\{\varphi(s+\theta)\}$ với $\theta<-s$, là tập đơn trị. Sử dụng bất đẳng thức cuối cùng trong (3.13), ta có

$$\begin{aligned}e^{-Lt}\chi(\Theta_T(t)) &\leq 4\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)e^{-Ls}\sup_{0\leq r\leq s}\chi\left(\Omega(r)\right)ds\\ &\leq 4\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)\sup_{0\leq r\leq s}e^{-Lr}\chi\left(\Omega(r)\right)ds\\ &\leq \left(4\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)ds\right)\omega_T(\Omega_T).\end{aligned}$$

Do đó

$$\omega_T(\Theta_T)\leq\left(4\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)ds\right)\omega_T(\Omega_T). \tag{3.14}$$

Mặt khác, ta có thể viết

$$\Theta_T=\left[S_\alpha(\cdot)\varphi(0)+\mathcal{W}(\mathcal{P}_F(\Omega))\right]_{[0,T]}.$$

Nhờ giả thiết $(\mathbf{F}^\sharp)(3)$, ta có $\mathcal{P}_F(\Omega)|_{[0,T]}$ là tập bị chặn tích phân. Nên theo Mệnh đề 3.1, $\mathcal{W}(\mathcal{P}_F(\Omega))|_{[0,T]}$ là tập đồng liên tục. Điều này suy ra Θ_T cũng là tập đồng liên tục. Nói cách khác, ta có

$$\mathrm{mod}_T(\Theta_T)=0. \tag{3.15}$$

Kết hợp (3.14) và (3.15), ta có

$$\begin{aligned}\chi_\infty(\mathcal{F}(\Omega)) &= \sup_{T>0}\omega(\Theta_T)+\sup_{T>0}\mathrm{mod}_T(\Theta_T)\\ &\leq \left(4\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)ds\right)\sup_{T>0}\omega_T(\Omega_T)\\ &\leq \left(4\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)ds\right)\chi_\infty(\Omega).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Bây giờ ta cần ước lượng $d_\infty(\mathcal{F}(\Omega))$. Cho $z \in \mathcal{F}(\Omega)$, ta có thể lấy $v \in \Omega$ và $f \in \mathcal{P}_F(v)$, sao cho

$$z(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

Cho $\|v\|_g \leq R$. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{\|z(t)\|}{g(t)} &\leq \frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)}\|\varphi(0)\| + \frac{1}{g(t)}\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\|f(s)\|ds \\ &\leq \frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)}\|\varphi(0)\| + \int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}\left(\frac{m(s)}{g(s)}|v[\varphi]_s|_{\mathcal{B}} + \frac{p(s)}{g(s)}\right)ds.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Với $s \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(s)}|v[\varphi]_s|_{\mathcal{B}} &\leq \frac{K(s)}{g(s)}\sup_{r\in[0,s]}\|v(r)\| + \frac{M(s)}{g(s)}|\varphi|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K(s)\sup_{r\in[0,s]}\frac{\|v(r)\|}{g(r)} + \frac{M(s)}{g(s)}|\varphi|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_\infty R + M_g|\varphi|_{\mathcal{B}},\end{aligned} \tag{3.18}$$

ở đây $K_\infty = \sup_{s\geq 0} K(s)$, $M_g = \sup_{s\geq 0}\frac{M(s)}{g(s)}$.

Cho $\epsilon > 0$, do giả thiết $(\mathbf{F}^\sharp)(3)$, tồn tại $T_1 > 0$, sao cho

$$\begin{aligned}&\int_{T_1}^t \frac{p(s)}{g(s)}ds < \epsilon, \\ &\int_{T_1}^t m(s)ds < \epsilon,\ \forall t \geq T_1.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Vì $\frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)} \to 0$ khi $t \to +\infty$, nên có thể tìm được $D_\alpha, T_2 > 0$, sao cho

$$\begin{aligned}&\frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)} \leq D_\alpha,\ \forall t \geq 0, \\ &\frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)} < \epsilon,\ \forall t \geq T_2.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Do đó, theo (3.17)-(3.20), với mọi $t \geq T_1 + T_2$ thì

$$\begin{aligned}\frac{\|z(t)\|}{g(t)} \leq \epsilon\|\varphi(0)\| &+ \int_0^{T_1}\frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}\left[(K_\infty R + M_g|\varphi|_{\mathcal{B}})m(s) + \frac{p(s)}{g(s)}\right]ds \\ &+ \int_{T_1}^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}\left[(K_\infty R + M_g|\varphi|_{\mathcal{B}})m(s) + \frac{p(s)}{g(s)}\right]ds\end{aligned}$$

$$\leq \epsilon\|\varphi(0)\| + \epsilon\left[(K_\infty R + M_g|\varphi|_{\mathcal{B}})\|m\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + \left\|\frac{p}{g}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\right]$$
$$+ \epsilon D_\alpha(K_\infty R + M_g|\varphi|_{\mathcal{B}} + 1).$$

Ta vừa chỉ ra rằng với $\epsilon > 0$, tồn tại $C^*, T > 0$, sao cho

$$\frac{\|z(t)\|}{g(t)} \leq C^*\epsilon,\ \forall t \geq T,$$

với mọi $z \in \mathcal{F}(\Omega)$. Điều này có nghĩa là

$$d_\infty(\mathcal{F}(\Omega)) = \lim_{T\to+\infty} \sup_{z\in\mathcal{F}(\Omega)} \sup_{t\geq T} \frac{\|z(t)\|}{g(t)} = 0. \tag{3.21}$$

Kết hợp (3.16) và (3.21), ta có

$$\chi^*(\mathcal{F}(\Omega)) \leq \left(4\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)ds\right)\chi_\infty(\Omega)$$
$$\leq \ell\cdot\chi^*(\Omega),$$

với

$$\ell = 4\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-L(t-s)}\|S_\alpha(t-s)\|k(s)ds < 1.$$

Mặt khác, vì $\chi^*(\Omega) \leq \chi^*(\mathcal{F}(\Omega))$ nên

$$\chi^*(\Omega) \leq \chi^*(\mathcal{F}(\Omega)) \leq \ell\cdot\chi^*(\Omega),$$

suy ra $\chi^*(\Omega) = 0$. Vậy Ω là compact tương đối, theo Bổ đề 3.1. □

Kết quả chính của phần này được trình bày trong định lí sau.

Định lí 3.1. *Nếu các giả thiết* $(\mathbf{A}^\sharp)$, $(\mathbf{B}^\sharp)$ *và* $(\mathbf{F}^\sharp)$ *được thỏa mãn và*

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}K(s)m(s)ds < 1 \tag{3.22}$$

thì bài toán (3.1)-(3.2) *có ít nhất một nghiệm tích phân thỏa mãn* $\dfrac{\|u(t)\|}{g(t)} = o(1)$ *khi* $t \to +\infty$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng, toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ có điểm bất động trong $\mathbf{C}_{g,\varphi}$. Rõ ràng $\mathcal{F}(v)$ lồi với mỗi $v \in \mathbf{C}_{g,\varphi}$, do tính lồi của $\mathcal{P}_F(v)$. Mặt khác, theo chứng minh trong Bổ đề 3.4, ta có

$$\chi^*(\mathcal{F}(v)) \leq \ell\cdot\chi^*(\{v\}) = 0.$$

Do đó, $\mathcal{F}(v)$ là tập compact tương đối. Vì $\mathcal{F}$ là toán tử đóng nên $\mathcal{F}(v)$ là compact. Nghĩa là, $\mathcal{F}$ có giá trị lồi, compact. Theo Định lí 1.7, Bổ đề 3.3 và Bổ đề 3.4, ta còn phải chứng minh rằng $\mathcal{F}(\mathbf{B}_R) \subset \mathbf{B}_R$ với $R > 0$ nào đó, ở đây $\mathbf{B}_R$ là hình cầu đóng tâm tại gốc tọa độ và bán kính R. Giả sử ngược lại rằng, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $v_n \in \mathbf{C}_{g,\varphi}$, $\|v_n\|_g \leq n$ sao cho $\|z_n\|_g > n$, $z_n \in \mathcal{F}(v_n)$. Lấy $f_n \in \mathcal{P}_F(v_n)$, sao cho

$$z_n(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f_n(s)ds.$$

Sử dụng các ước lượng tương tự như trong chứng minh của Bổ đề 3.4, ta có

$$\frac{\|z_n(t)\|}{g(t)} \leq \frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)}\|\varphi(0)\| + \int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}\left(\frac{m(s)}{g(s)}|v_n[\varphi]_s|_{\mathcal{B}} + \frac{p(s)}{g(s)}\right)ds,$$

$$\frac{1}{g(s)}|v_n[\varphi]_s|_{\mathcal{B}} \leq nK(s) + M_g|\varphi|_{\mathcal{B}},\ \forall t, s \geq 0.$$

Vậy

$$\frac{\|z_n(t)\|}{g(t)} \leq n\int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}K(s)m(s)ds + Q(t), \tag{3.23}$$

ở đó

$$Q(t) = \frac{\|S_\alpha(t)\|}{g(t)}\|\varphi(0)\| + M_g|\varphi|_{\mathcal{B}}\int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}m(s)ds + \int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}\frac{p(s)}{g(s)}ds,$$

bị chặn đều, theo (3.9) và $m, \frac{p}{g} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Từ (3.23), ta có

$$1 < \frac{1}{n}\sup_{t\geq 0}\frac{\|z_n(t)\|}{g(t)} \leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}K(s)m(s)ds + \frac{1}{n}\sup_{t\geq 0}Q(t).$$

Qua giới hạn bất đẳng thức cuối cùng khi $n \to +\infty$, ta thu được bất đẳng thức mâu thuẫn với (3.22). □

3.3. KẾT QUẢ VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN YẾU

Trong mục này, ta xét trường hợp A là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $\omega < 0$ và $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, nghĩa là α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ là ổn định tiệm cận:

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \frac{\hat{C}}{1+|\omega|t^\alpha},\ \forall t \geq 0, \tag{3.24}$$

theo Định lí 1.4.

Ta thấy rằng, bằng cách chọn $g \equiv 1$ và tiến hành tương tự như chứng minh Định lí 3.1, ta có thể chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2) và suy ra tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm không. Cụ thể là, ta xét toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ trên không gian

$$BC_{0,\varphi} = \{v \in C([0,+\infty); X) : v(0) = \varphi(0),\ \lim_{t\to+\infty} \|v(t)\| = 0\},$$

với chuẩn

$$\|v\|_\infty = \sup_{t\geq 0} \|v(t)\|.$$

Trong tình huống này, các giả thiết $(\mathbf{A}^\sharp)$, $(\mathbf{B}^\sharp)$ và $(\mathbf{F}^\sharp)$ được thay thế bởi các giả thiết sau.

$(\mathbf{A}_a^\sharp)$ A là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $\omega < 0$ và $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, sao cho α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn.

$(\mathbf{B}_a^\sharp)$ Không gian pha $\mathcal{B}$ cho trong Định nghĩa 1.26, với hàm K bị chặn đều và M thỏa mãn $M(t) = o(1)$ khi $t \to +\infty$.

$(\mathbf{F}_a^\sharp)$ Ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ thỏa mãn:

(1) với $\psi \in \mathcal{B}$ ánh xạ đa trị $F(\cdot, \psi) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{K}v(X)$ có một hàm chọn đo được mạnh địa phương, nghĩa là với mỗi $T > 0$ ta có thể tìm được một hàm đo được mạnh $f : [0,T] \to X$, sao cho $f(t) \in F(t,\psi)$ với hầu khắp $t \in [0,T]$;

(2) với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$ ánh xạ đa trị $F(t,\cdot) : \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ là nửa liên tục trên trên $\mathcal{B}$;

(3) tồn tại hàm $m \in L^1(\mathbb{R}^+)$, sao cho với mọi $\psi \in \mathcal{B}$, ta có

$$\|F(t,\psi)\| := \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(t,\psi)\} \leq m(t)|\psi|_{\mathcal{B}},$$

với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$;

(4) tồn tại hàm $k \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, sao cho với mọi tập bị chặn $D \subset \mathcal{B}$, ta có $\chi(F(t,D)) \leq k(t) \sup_{s\leq 0} \chi(D(s))$ với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$.

Định lí sau là một hệ quả của Định lí 3.1.

Định lí 3.2. *Giả sử các giả thiết* $(\mathbf{A}_a^\sharp)$, $(\mathbf{B}_a^\sharp)$ *và* $(\mathbf{F}_a^\sharp)$ *thỏa mãn. Với điều kiện*

$$\Lambda_\infty = \sup_{t\geq 0} \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| K(s) m(s) ds < 1, \tag{3.25}$$

thì nghiệm không của bài toán (3.1)-(3.2) *là ổn định tiệm cận yếu.*

Chứng minh. Kí hiệu $\Sigma(\varphi)$ là tập nghiệm của (3.1) với điều kiện ban đầu φ. Theo Định lí 3.1, ta có $\Sigma(\varphi) \neq \emptyset$ và có thể tìm được $z \in \Sigma(\varphi)$, sao cho $\|z(t)\| = o(1)$ khi $t \to +\infty$. Từ giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(3)$ ta thấy rằng $u = 0$ là một nghiệm của (3.1).

Trước tiên, ta chứng tỏ rằng nghiệm $u = 0$ là ổn định, nghĩa là với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $|\varphi|_{\mathcal{B}} < \delta$, ta có $|z_t|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$, $z \in \Sigma(\varphi)$. Thực vậy, với $z \in \Sigma(\varphi)$, ta có thể lấy $f \in \mathcal{P}_F(z|_{\mathbb{R}^+})$ sao cho

$$z(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, t \geq 0.$$

Sau đó, với giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(3)$ và (B3)-(B4) trong Định nghĩa 1.26, ta có

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq \hat{C}\|\varphi(0)\| + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|m(s)|z_s|_{\mathcal{B}}ds \\
&\leq \hat{C}\varrho|\varphi|_{\mathcal{B}} + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|m(s)K(s)\sup_{r\in[0,s]}\|z(r)\|ds \\
&\qquad + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|m(s)M(s)|\varphi|_{\mathcal{B}}ds \\
&\leq \hat{C}\varrho|\varphi|_{\mathcal{B}} + \Lambda_\infty \sup_{s\geq 0}\|z(s)\| + \Upsilon_\infty|\varphi|_{\mathcal{B}}, \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

ở đó

$$\Upsilon_\infty = \sup_{t\geq 0}\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|M(s)m(s)ds < +\infty.$$

Ước lượng (3.26) suy ra

$$\sup_{t\geq 0}\|z(t)\| \leq \frac{\hat{C}\varrho + \Upsilon_\infty}{1-\Lambda_\infty}|\varphi|_{\mathcal{B}}. \qquad (3.27)$$

Vậy, với mọi $t \geq 0$ thì

$$\begin{aligned}
|z_t|_{\mathcal{B}} &\leq K(t)\sup_{r\in[0,t]}\|z(r)\| + M(t)|\varphi|_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_\infty \sup_{r\geq 0}\|z(r)\| + M_\infty|\varphi|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \left[\frac{K_\infty(\hat{C}\varrho + \Upsilon_\infty)}{1-\Lambda_\infty} + M_\infty\right]|\varphi|_{\mathcal{B}}, \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

ở đây $K_\infty = \sup_{t\geq 0} K(t)$ và $M_\infty = \sup_{t\geq 0} M(t)$. Điều này đảm bảo tính ổn định của nghiệm không.

Tiếp theo, ta chứng minh nghiệm không là hút yếu. Lấy $z \in \Sigma(\varphi)$, sao cho $\|z(t)\| = o(1)$ khi $t \to +\infty$, ta cần chứng tỏ rằng $|z_t|_{\mathcal{B}} \to 0$ khi

$t \to +\infty$. Lại dùng (B3) trong Định nghĩa 1.26, với $\sigma = \frac{t}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} |z_t|_{\mathcal{B}} &\leq K\left(\frac{t}{2}\right) \sup_{r\in[\frac{t}{2},t]} \|z(r)\| + M\left(\frac{t}{2}\right)|z_{\frac{t}{2}}|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_\infty \sup_{r\geq\frac{t}{2}} \|z(r)\| + M\left(\frac{t}{2}\right)\left[\frac{K_\infty(\hat{C}\varrho + \Upsilon_\infty)}{1-\Lambda_\infty} + M_\infty\right]|\varphi|_{\mathcal{B}}, \quad (3.29) \end{aligned}$$

nhờ vào (3.28). Cho $\varepsilon > 0$, theo $(\mathbf{B}_a^\sharp)$, tồn tại $T > 0$ sao cho $\|z(r)\| < \varepsilon$ và $M(r) < \varepsilon$ với mọi $r \geq T$. Do đó, bất đẳng thức (3.29) cho ta thấy rằng, với mọi $t \geq 2T$ thì

$$|z_t|_{\mathcal{B}} < C^*\varepsilon,$$

ở đó

$$C^* = K_\infty + \left[\frac{K_\infty(\hat{C}\varrho + \Upsilon_\infty)}{1-\Lambda_\infty} + M_\infty\right]|\varphi|_{\mathcal{B}}.$$

Vì $\epsilon > 0$ bé tùy ý, ta có điều phải chứng minh. □

3.4. ÁP DỤNG

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên trơn $\partial\Omega$. Xét phương trình đạo hàm riêng sau

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta_x u(s,x)ds + f(t,x), t > 0, x \in \Omega, \quad (3.30)$$

ở đó $\alpha \in (1,2)$, hàm u thỏa mãn điều kiện biên

$$u(t,x) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (3.31)$$

và điều kiện ban đầu

$$u(t,x) = \varphi(t,x), x \in \Omega, t \leq 0; \quad (3.32)$$

hàm f ràng buộc bởi

$$f(t,x) \in b(t,x)\int_{-\infty}^0 \int_\Omega \nu(\theta,y)\big[f_1(u(t+\theta,y)), f_2(u(t+\theta,y))\big]dyd\theta, \quad (3.33)$$

ở đây $[f_1, f_2] = \{\tau f_1 + (1-\tau)f_2 : \tau \in [0,1]\}$.

Xét $A = \Delta$ với $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, khi đó tập giải của A, $\rho(A) \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, -\lambda_1]$, ở đó $\lambda_1 = \inf\{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} : \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$. Vậy A là toán tử quạt kiểu $(-\lambda_1, \theta)$ với $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ bất kỳ.

Cho $X = L^2(\Omega)$. Để có được α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$, ta xét hệ tuyến tính

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta_x u(s,x)ds,\ x \in \Omega, t > 0, \tag{3.34}$$

$$u(t,x) = 0,\ x \in \partial\Omega, t \geq 0, \tag{3.35}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{3.36}$$

ở đó $u_0 \in X$. Tích phân hai vế (3.34), ta được

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Delta_x u(s,x)ds + u_0(x).$$

Điều này nghĩa là

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = \Delta_x u(t,x), \tag{3.37}$$

$$u(t,x) = 0,\ x \in \partial\Omega, t \geq 0, \tag{3.38}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \tag{3.39}$$

ở đây ∂_t^α là đạo hàm phân thứ theo nghĩa Caputo với bậc $\alpha \in (1,2)$ ứng với t. Rõ ràng, nghiệm của bài toán (3.37)-(3.39) được cho bởi

$$u(t,x) = S_\alpha(t)u_0(x).$$

Dựa vào [69, Định lí 2.3], ta thấy rằng $S_\alpha(\cdot)$ khả vi trên $(0,+\infty)$ và

$$\left\|\frac{d}{dt}S_\alpha(t)u_0\right\| \leq C_\alpha t^{-1}\|u_0\|,\ t > 0,$$

với C_α là một hằng số dương. Đặc biệt, $S_\alpha(\cdot)$ là liên tục theo chuẩn. Vậy giả thiết $(\mathbf{A}_a^\sharp)$ được đáp ứng.

Xét không gian pha $\mathcal{B} = CL_g^2$ (xem Ví dụ 1.7) với $g(\theta) = e^{h\theta}$, ở đây nửa chuẩn trong $\mathcal{B}$ được cho bởi

$$|w|_{\mathcal{B}} = \sup_{-r\leq\theta\leq 0}\|w(\theta)\|_X + \left(\int_{-\infty}^{-r} e^{h\theta}\|w(\theta)\|_X^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}},$$

với $r = -\frac{1}{h}\ln(1-h)$. Nhờ công thức (1.15) và (1.16), ta có

$$K(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq r, \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{e^{-hr} - e^{-ht}}, & t > r; \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} \max\left\{e^{-\frac{1}{2}ht}, 1 + \sqrt{\frac{e^{-hr}}{h}(1-e^{-ht})}\right\}, & 0 \leq t \leq r, \\ e^{-\frac{1}{2}ht}, & t > r. \end{cases}$$

Ta thấy rằng $K(t) = O(1), M(t) = o(1)$ khi $t \to +\infty$, và do đó $(\mathbf{B}_a^\sharp)$ thỏa mãn.

Ta sẽ chỉ ra rằng hệ (3.30)-(3.33) là ổn định tiệm cận yếu với một thiết lập thích hợp đối với phần phi tuyến. Cụ thể, giử sử rằng

(N1) $b \in L^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$;

(N2) $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là liên tục và thỏa mãn

$$|f_i(z)| \leq C_f|z|, \forall z \in \mathbb{R},$$

với $C_f > 0$ nào đó;

(N3) $\nu : (-\infty, 0] \times \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, sao cho

$$|\nu(\theta, y)| \leq C_\nu e^{h\theta}, \forall y \in \Omega, \theta \leq 0,$$

ở đây $h \in (0, 1)$ và $C_\nu > 0$.

Cho $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ là ánh xạ đa trị, định nghĩa bởi

$$F(t, w)(x) = b(t, x) \int_{-\infty}^{0} \int_{\Omega} \nu(\theta, y)\big[f_1(w(\theta, y)), f_2(w(\theta, y))\big] dy d\theta.$$

Khi đó ta thấy rằng, với mỗi $\tau \in [0, 1]$ hàm số

$$f(t, x) = b(t, x) \int_{-\infty}^{0} \int_{\Omega} \nu(\theta, y)\big[\tau f_1(w(\theta, y)) + (1 - \tau) f_2(w(\theta, y))\big] dy d\theta$$

là một hàm chọn khả tích của $F(t, w)$. Giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(1)$ được thỏa mãn.

Bây giờ, với mỗi tập bị chặn $W \subset \mathcal{B}$, $F(t, W) \subset \text{span}\{b(t, \cdot)\}$, là không gian con một chiều của $L^2(\Omega)$. Thêm nữa, nhờ (N2), $F(t, W)$ cũng là tập bị chặn và compact tương đối. Do đó

$$\chi(F(t, W)) = 0,$$

và giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(4)$ thỏa mãn với $k = 0$. Đặc biệt, $F(t, w)$ là compact tương đối với mỗi $w \in \mathcal{B}$. Nhờ tính liên tục của f_1, f_2 và Định lí hội tụ trội Lebesgue, ta có thể kiểm tra tính đóng của $F(t, \cdot)$. Do đó, $F(t, \cdot)$ có giá trị compact và nửa liên tục trên theo [40, Định lí 1.1.12]. Giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(2)$ được thỏa mãn.

Đối với giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(3)$, ta có ước lượng sau

$$\|F(t, w)\|^2 \leq C_\nu^2 C_f^2 \|b(t, \cdot)\|^2 \left(\int_{-\infty}^{0} e^{h\theta} \int_{\Omega} |w(\theta, y)| dy d\theta \right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{h} C_\nu^2 C_f^2 \|b(t,\cdot)\|^2 \int_{-\infty}^{0} e^{h\theta} \left(\int_\Omega |w(\theta,y)| dy \right)^2 d\theta \\
&\leq \frac{1}{h} C_\nu^2 C_f^2 \mu(\Omega) \|b(t,\cdot)\|^2 \int_{-\infty}^{0} e^{h\theta} \|w(\theta,\cdot)\|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{h} C_\nu^2 C_f^2 \mu(\Omega) \|b(t,\cdot)\|^2 \left(\int_{-r}^{0} + \int_{-\infty}^{-r} \right) e^{h\theta} \|w(\theta,\cdot)\|^2 d\theta \\
&\leq \frac{1}{h} C_\nu^2 C_f^2 \mu(\Omega) \|b(t,\cdot)\|^2 \left(\|w\|^2_{C([-r,0];X)} + \int_{-\infty}^{-r} e^{h\theta} \|w(\theta,\cdot)\|^2 d\theta \right) \\
&\leq \frac{1}{h} C_\nu^2 C_f^2 \mu(\Omega) \|b(t,\cdot)\|^2 |w|^2_{\mathcal{B}},
\end{aligned}
$$

nhờ bất đẳng thức Hölder và $r = -\frac{1}{h}\ln(1-h)$, ở đây $\mu(\Omega)$ là độ đo Lebesgue của Ω. Khi đó

$$
\|F(t,w)\| \leq \frac{1}{\sqrt{h}} C_\nu C_f \sqrt{\mu(\Omega)} \|b(t,\cdot)\| |w|_{\mathcal{B}}.
$$

Như vậy, giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(3)$ được thỏa mãn với $m(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} C_\nu C_f \sqrt{\mu(\Omega)} \|b(t,\cdot)\|$.

Cuối cùng, nếu ta giả sử thêm rằng $b(t,x) = b_1(t) b_2(x)$ với $b_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $b_2 \in L^2(\Omega)$ thì

$$
\|b(t,\cdot)\| = b_1(t) \|b_2\|,
$$

và ta có thể kiểm tra điều kiện (3.25) như sau

$$
\Lambda_\infty \leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t \frac{C_0 K_\infty \|b_2\| b_1(s)}{1 + \lambda_1 (t-s)^\alpha} ds \leq C_0 K_\infty \|b_2\| \|b_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)},
$$

ở đó $C_0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \hat{C} C_\nu C_f \sqrt{\mu(\Omega)}$, nhờ vào (1.4). Do đó, (3.25)-(3.26) thỏa mãn với $\|b_2\| \|b_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$ nhỏ.

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu lớp bao hàm thức vi phân dạng tán xạ-sóng với trễ vô hạn. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được sự tồn tại nghiệm tích phân (Định lí 3.1).

2) Chứng minh được tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường (Định lí 3.2)

3) Cuối cùng, chúng tôi áp dụng kết quả thu được cho lớp phương trình đạo hàm riêng đa trị ở Mục 3.4.

Chúng tôi nghiên cứu tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm không cho bao hàm thức vi tích phân nửa tuyến tính với trễ vô hạn bằng cách sử dụng

các ước lượng độ đo không compact. Về mặt kỹ thuật, việc xây dựng độ đo χ^* để xác định một tiêu chuẩn compact trên không gian C_g đóng vai trò quan trọng. Kết quả nghiên cứu trong chương này là kết quả đầu tiên về tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm *không* đối với bao hàm thức vi tích phân dạng (3.1) với trễ vô hạn.

Chương 4

TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHÂN THỨ CÓ TRỌNG

Trong chương này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm đối với phương trình sóng phân thứ có trọng nửa tuyến tính với toán tử quạt và phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính. Vấn đề nêu trên được nghiên cứu dựa trên lí thuyết về α-giải thức, định lí điểm bất động cho ánh xạ nén và các ước lượng cục bộ của nghiệm. Cuối cùng là một ứng dụng cho một lớp phương trình đạo hàm riêng cụ thể.

Nội dung của chương này dựa trên công trình số 3 (dạng tiền ấn phẩm) trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach. Xét bài toán sau

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_0^{\alpha,\sigma}u(t) &= Au(t) + f(t, u_t),\ t \in [0, T], && (4.1)\\
u(s) &= \varphi(s), s \in [-h, 0], && (4.2)\\
u'(0) &= y, && (4.3)
\end{aligned}
$$

ở đây $\alpha \in (1, 2), \sigma > 0$, ${}^{C}D_0^{\alpha,\sigma}$ là đạo hàm phân thứ có trọng với bậc α theo nghĩa Caputo (xem Định nghĩa 1.5), hàm trạng thái u nhận giá trị trong X với trễ $u_t \in C([-h, 0]; X)$ xác định bởi $u_t(s) = u(t + s), s \in [-h, 0]$, A là một toán tử tuyến tính đóng trên X và hàm phi tuyến f được định nghĩa trên $[0, T] \times C([-h, 0]; X)$.

4.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM

Trước tiên, để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán (4.1)-(4.3) trong trường hợp phần phi tuyến có tăng trưởng dưới tuyến tính, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau:

($\mathbf{A}^*$) A là toán tử quạt kiểu $(0, \theta)$ với góc $\theta \in [0, (1 - \frac{\alpha}{2})\pi)$ và $0 \in \rho(A)$.

($\mathbf{F}^*$) Ánh xạ $f : [0,T] \times \mathcal{C}_h \to X$ liên tục và thỏa mãn:

(1) điều kiện tăng trưởng

$$\|f(t,v)\| \leq a + b\|v\|_{\mathcal{C}_h}, \forall v \in \mathcal{C}_h, \text{ hầu khắp } t \in [0,T],$$

với a, b là các số không âm;

(2) nếu $(\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$, không compact thì với mọi tập bị chặn $\Omega \subset \mathcal{C}_h$, ta có

$$\chi(f(t,\Omega)) \leq k(t) \sup_{\theta \in [-h,0]} \chi(\Omega(\theta)),$$

ở đây $k \in L^1(0,T)$ là hàm không âm.

Chúng tôi sử dụng phép biến đổi Laplace để đưa ra công thức biểu diễn nghiệm tích phân cho bài toán (4.1)-(4.3). Chú ý rằng, trong trường hợp $\alpha \in (1,2)$,

$${}^C D_0^{\alpha,\sigma} u(t) = \frac{1}{2-\alpha} \int_0^t h_{\alpha,\sigma}(t-s)(u''(s) + 2\sigma u'(s) + \sigma^2 u(s))ds,$$

ở đây $h_{\alpha,\sigma}(t) = t^{1-\alpha} e^{-\sigma t}$. Kí hiệu $\mathcal{L}[f]$ là biến đổi Laplace của hàm f. Thực hiện phép biến đổi Laplace đối với

$$D^{\alpha,\sigma} u(t) = Au(t) + f(t), \ \alpha \in (1,2), \sigma > 0,$$

ta được

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \mathcal{L}\left[h_{\alpha,\sigma} * (u'' + 2\sigma u' + \sigma^2 u)\right](\lambda) = A\mathcal{L}[u](\lambda) + \mathcal{L}[f](\lambda).$$

Sử dụng quy tắc biến đổi tích chập, ta có

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \mathcal{L}\left[h_{\alpha,\sigma}\right](\lambda) \mathcal{L}\left[(u'' + 2\sigma u' + \sigma^2 u)\right](\lambda) = A\mathcal{L}[u](\lambda) + \mathcal{L}[f](\lambda).$$

Vì $\mathcal{L}\left[h_{\alpha,\sigma}\right](\lambda) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{(\lambda+\sigma)^{2-\alpha}}$, nên

$$\begin{aligned}(\lambda+\sigma)^{\alpha-2}\left((\lambda+\sigma)^2 \mathcal{L}[u](\lambda) - (\lambda+\sigma)u(0) - (u'(0) + \sigma u(0))\right) \\ = A\mathcal{L}[u](\lambda) + \mathcal{L}[f](\lambda).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](\lambda) = (\lambda+\sigma)^{\alpha-1}((\lambda+\sigma)^\alpha I - A)^{-1} u(0) \\ + (\lambda+\sigma)^{\alpha-2}((\lambda+\sigma)^\alpha I - A)^{-1}(u'(0) + \sigma u(0))\end{aligned}$$

$$+ ((\lambda+\sigma)^\alpha I - A)^{-1}\mathcal{L}[f](\lambda). \tag{4.4}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} &= \mathcal{L}[S_\alpha](\lambda),\\ \lambda^{\alpha-2}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} &= \lambda^{-1}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\\ &= \mathcal{L}[1 * S_\alpha](\lambda),\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathcal{L}[f](\lambda) &= \lambda^{1-\alpha}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathcal{L}[f](\lambda)\\ &= \mathcal{L}[g_{\alpha-1} * S_\alpha * f](\lambda).\end{aligned}$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace ngược đối với (4.4) và áp dụng quy tắc $\mathcal{L}[e^{-\sigma\cdot}f(\cdot)](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda+\sigma)$, suy ra

$$\begin{aligned}u(t) = e^{-\sigma t}S_\alpha(t)u(0) &+ e^{-\sigma t}(1 * S_\alpha)(t)(\sigma u(0) + u'(0))\\ &+ \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s)f(s)ds.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Xét không gian Banach $\mathcal{C}_h \times X$ với chuẩn

$$\|(x,y)\| = \sup_{s\in[-h,0]} \|x(s)\| + \|y\| = \|x\|_{\mathcal{C}_h} + \|y\|.$$

Nhờ (4.5), nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 4.1. Cho trước $(\varphi, y) \in \mathcal{C}_h \times X$. Hàm $u \in C([-h,T];X)$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) trên đoạn $[-h,T]$ nếu và chỉ nếu $u(t) = \varphi(t)$ khi $t \in [-h,0]$ và

$$\begin{aligned}u(t) = e^{-\sigma t}S_\alpha(t)\varphi(0) &+ e^{-\sigma t}(1 * S_\alpha)(t)(y + \sigma\varphi(0)),\\ &+ \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s)f(s,u_s)ds,\end{aligned}$$

khi $t \in [0,T]$.

Với $\varphi \in \mathcal{C}_h$, ta định nghĩa không gian

$$C_\varphi = \{u \in C([0,T];X) : u(0) = \varphi(0)\}.$$

Khi đó, C_φ là một không gian con đóng của $C([0,T];X)$. Với $v \in C_\varphi$, ta có hàm $v[\varphi] : [-h,T] \to X$ định nghĩa bởi

$$v[\varphi](t) = \begin{cases}\varphi(t) & \text{nếu } -h \le t \le 0,\\ v(t) & \text{nếu } t \in [0,T].\end{cases}$$

Rõ ràng

$$v[\varphi]_t(\theta) = \begin{cases} \varphi(t+\theta), & -h-t<\theta<-t, \\ v(t+\theta), & \theta \in [-t,0]. \end{cases}$$

Sau đây, ta xét toán tử $\mathcal{F} : C_\varphi \to C_\varphi$ cho bởi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v)(t) = e^{-\sigma t} S_\alpha(t)\varphi(0) + e^{-\sigma t}(1 * S_\alpha)(t)(y + \sigma\varphi(0)) \\ + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s) f(s, v_s) ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dễ thấy rằng nếu v là một điểm bất động của $\mathcal{F}$ thì $v[\varphi]$ là một nghiệm tích phân của (4.1)-(4.3).

Xét toán tử $\mathcal{W} : L^1(0,T;X) \to C([0,T];X)$, xác định bởi

$$\mathcal{W}(f)(t) = \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s) f(s) ds. \tag{4.7}$$

Khi đó, toán tử nghiệm có biểu diễn sau

$$\mathcal{F}(v)(t) = e^{-\sigma t} S_\alpha(t)\varphi(0) + e^{-\sigma t}(1 * S_\alpha)(t)(y + \sigma\varphi(0)) + \mathcal{W} \circ N_f(v)(t),$$

ở đây $N_f(v)(t) = f(t, v[\varphi]_t)$, $v \in C_\varphi$.

Mệnh đề 4.1. *Toán tử $\mathcal{W}$ cho bởi (4.7), có các tính chất:*

(1) *Nếu tập $\Omega \subset L^1(0,T;X)$ bị chặn tích phân, thì $\mathcal{W}(\Omega)$ là tập đồng liên tục trong $C([0,T];X)$. Thêm nữa, nếu $R(\lambda, A)$ là compact với $\lambda \in \rho(A)$, thì $\mathcal{W}(\Omega)$ là tập compact tương đối trong $C([0,T];X)$.*

(2) *Nếu $\{f_n\} \subset L^1(0,T;X)$ là một dãy nửa compact thì $\{\mathcal{W}(f_n)\}$ có dãy con hội tụ trong $C([0,T];X)$. Hơn nữa nếu $f_n \rightharpoonup f$ trong $L^1(0,T;X)$ thì $\mathcal{W}(f_n) \to \mathcal{W}(f)$ trong $C([0,T];X)$.*

Chứng minh. Ta biết rằng toán tử $t \mapsto (g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t)$ liên tục theo chuẩn với $t > 0$, do đó toán tử Φ định nghĩa bởi

$$\Phi(t,s) = e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s),$$

thỏa mãn các giả thiết của Bổ đề 1.3. Điều này kéo theo $\mathcal{W}(\Omega)$ là đồng liên tục với mỗi tập bị chặn tích phân $\Omega \subset L^1(0,T;X)$. Nếu $R(\lambda, A)$ compact với $\lambda \in \rho(A)$, thì $S_\alpha(t)$ cũng compact với $t > 0$ nhờ Định lí 1.5. Vì vậy, ta có

$$\chi(\mathcal{W}(\Omega)(t)) = \chi\left(\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\left(\int_0^{t-s} g_{\alpha-1}(t-s-r) S_\alpha(r)\Omega(s) dr\right) ds\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\chi\left(\int_0^{t-s} g_{\alpha-1}(t-s-r)S_\alpha(r)\Omega(s)dr\right)ds\\
&\leq 16\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\left(\int_0^{t-s} g_{\alpha-1}(t-s-r)\chi\left(S_\alpha(r)\Omega(s)\right)dr\right)ds\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ở đây ta sử dụng Mệnh đề 1.5. Do đó, $\mathcal{W}(\Omega)$ là compact tương đối, theo định lí Arzelà-Ascoli.

Phần còn lại của mệnh đề được chứng minh tương tự như trong [40, Định lí 5.1.1]. □

Toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ cho bởi (4.6) là một ánh xạ liên tục trên C_φ, do tính liên tục của f.

Bổ đề 4.1. *Nếu các giả thiết* $(\mathbf{A}^*)$ *và* $(\mathbf{F}^*)$ *thỏa mãn thì*

$$
\chi_T(\mathcal{F}(\Omega)) \leq \left(4\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-(\sigma+L)(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|k(s)ds\right)\chi_T(\Omega),
$$

với mọi tập bị chặn $\Omega \subset C_\varphi$.

Chứng minh. Cho $\Omega \subset C_\varphi$ là một tập bị chặn. Với $v \in \Omega$, ta có

$$
\mathcal{F}(v)(t) = e^{-\sigma t}S_\alpha(t)\varphi(0) + e^{-\sigma t}\int_0^t S_\alpha(s)(y+\sigma\varphi(0))ds + \mathcal{W}\circ N_f(v)(t),
$$

trong đó

$$
\mathcal{W}\circ N_f(v)(t) = \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)f(s,v[\varphi]_s)ds.
$$

Do giả thiết $(\mathbf{F}^*)(1)$, $N_f(\Omega)$ bị chặn tích phân. Theo Mệnh đề 4.1, ta có $\mathcal{W}\circ N_f(\Omega)$ là một tập đồng liên tục trong C_φ. Vì vậy

$$
mod_T(\mathcal{W}\circ N_f(\Omega)) = 0. \tag{4.8}
$$

Bây giờ ta đánh giá $\omega_T(\mathcal{W}\circ N_f(\Omega))$. Nếu $(\lambda I - A)^{-1}$ compact với $\lambda \in \rho(A)$, thì $\mathcal{W}\circ N_f(\Omega)$ là compact theo Mệnh đề 4.1. Nghĩa là

$$
\omega_T(\mathcal{W}\circ N_f(\Omega)) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\chi(\mathcal{W}\circ N_f(\Omega)(t)) = 0.
$$

Trong trường hợp ngược lại, sử dụng $(\mathbf{F}^*)(2)$, suy ra

$$
\chi(\mathcal{W}\circ N_f(\Omega)(t))
$$

$$\leq 4\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|\chi(f(s,\Omega[\varphi]_s))ds$$
$$\leq 4\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|k(s)\sup_{\theta\in[-h,0]}\chi(\Omega[\varphi](s+\theta))ds$$
$$\leq 4\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|k(s)\sup_{r\in[0,s]}\chi(\Omega(r))ds,$$

ở đây ta sử dụng đẳng thức $\Omega[\varphi](r)=\{\varphi(r)\}$ với $r\in[-h,0]$. Điều này kéo theo

$$e^{-Lt}\chi(\mathcal{F}(\Omega)(t))\leq 4\int_0^t e^{-(\sigma+L)(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|k(s)e^{-Ls}\chi(\Omega(s))ds.$$

Vậy

$$\omega_T(\mathcal{F}(\Omega)\leq\left(4\int_0^t e^{-(\sigma+L)(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|k(s)ds\right)\omega_T(\Omega). \quad (4.9)$$

Kết hợp (4.8) và (4.9), ta có điều cần chứng minh. □

Chọn L trong công thức (1.5), sao cho

$$4\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-(\sigma+L)(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|k(s)ds<1, \quad (4.10)$$

ta thấy rằng toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ là χ_T-nén dưới các giả thiết áp đặt lên A và f. Định lí sau đây là kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán khi phần phi tuyến có tăng trưởng dưới tuyến tính.

Định lí 4.1. *Với các giả thiết* $(\mathbf{A}^*)$ *và* $(\mathbf{F}^*)$. *Tập nghiệm của bài toán* (4.1)-(4.3) *là khác rỗng.*

Chứng minh. Để áp dụng Định lí 1.9, ta chỉ cần tìm một tập lồi, đóng và bị chặn $\mathcal{M}$ sao cho $\mathcal{F}(\mathcal{M})\subset\mathcal{M}$. Lấy $v\in C_\varphi$, khi đó

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(v)(t)\| &\leq e^{-\sigma t}\|S_\alpha(t)\|\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+e^{-\sigma t}\int_0^t\|S_\alpha(s)\|(\|y\|+\sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})ds\\ &\quad+\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\|(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\|\|f(s,v[\varphi]_s)\|ds\\ &\leq Me^{-\sigma t}\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+Mte^{-\sigma t}(\|y\|+\sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})\\ &\quad+C_\alpha\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{-\sigma(t-s)}(a+b\|v[\varphi]_s\|_{\mathcal{C}_h})ds,\end{aligned}$$

nhờ các đánh giá đã cho trong Định lí 1.5 và 1.6. Dễ thấy rằng

$$\|v[\varphi]_s\|_{\mathcal{C}_h}=\sup_{\theta\in[-h,0]}\|v[\varphi](s+\theta)\|\leq\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\sup_{\rho\in[0,s]}\|v(\rho)\|,$$

nên ta có

$$e^{\sigma t}\|\mathcal{F}(v)(t)\| \leq M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + Mt(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) + C_\alpha(a + b\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})I(t)$$
$$+ bC_\alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \sup_{\rho\in[0,s]} \|v(\rho)\| ds$$

với

$$I(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} ds.$$

Lưu ý là

$$I(t) \leq e^{\sigma t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{t^\alpha}{\alpha} e^{\sigma t},$$

do đó

$$e^{\sigma t}\|\mathcal{F}(v)(t)\| \leq C_1 + C_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \sup_{r\in[0,s]} \|v(r)\| ds, \tag{4.11}$$

ở đây

$$C_1 = M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + MT(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) + \frac{C_\alpha}{\alpha}(a + b\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})T^\alpha e^{\sigma T},\ C_2 = bC_\alpha.$$

Do vế phải của bất đẳng thức (4.11) không giảm theo t, suy ra

$$e^{\sigma t} \sup_{r\in[0,t]} \|\mathcal{F}(v)(r)\| \leq C_1 + C_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \sup_{r\in[0,s]} \|v(r)\| ds, \tag{4.12}$$

Kí hiệu

$$\mathcal{M} = \{u \in C_\varphi : e^{\sigma t} \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| \leq \psi(t), t \in [0,T]\},$$

trong đó ψ là nghiệm duy nhất của phương trình tích phân

$$\psi(t) = C_1 + C_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \psi(s) ds,\ t \in [0,T].$$

Rõ ràng $\mathcal{M}$ là một con tập lồi, đóng và bị chặn của C_φ. Ước lượng (4.12) đảm bảo $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. □

Bây giờ, để xét trường hợp f có thể tăng trưởng trên tuyến tính, ta thay điều kiện $(\mathbf{F}^*)$ bởi điều kiện sau.

$(\mathbf{F}_a^*)$ Hàm phi tuyến $f : [0,T] \times \mathcal{C}_h \to X$ liên tục và thỏa mãn $(\mathbf{F})(2)$. Hơn nữa, tồn tại hàm $m \in C([0,T];\mathbb{R}^+)$ và hàm không giảm $\Psi \in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$, sao cho

$$\|f(t,v)\| \leq m(t)\Psi(\|v\|_{\mathcal{C}_h}),\ \forall v \in \mathcal{C}_h.$$

Đặt $C_\sigma = \max\{\sigma^{-1}e^{-1}, Te^{-\sigma T}\}$, và kí hiệu $|\cdot|_\infty$ là chuẩn sup trong $C([0,T];\mathbb{R})$. Ta có kết quả tiếp theo về sự tồn tại nghiệm khi phần phi tuyến có thể tăng trưởng trên tuyến tính.

Định lí 4.2. *Giả sử rằng các giả thiết* $(\mathbf{A}^*)$ *và* $(\mathbf{F}_a^*)$ *thỏa mãn. Nếu tồn tại* $R > 0$, *sao cho*

$$M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + MC_\sigma(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) + C_\alpha\Gamma(\alpha)|I_0^{\alpha,\sigma}m|_\infty\Psi(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + R) \le R, \tag{4.13}$$

thì bài toán (4.1)-(4.3) *có ít nhất một nghiệm tích phân.*

Chứng minh. Để áp dụng Định lí 1.9, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$, trong đó B_R là hình cầu đóng trong C_φ có tâm tại gốc tọa độ với bán kính R. Thật vậy, lấy $v \in B_R$, khi đó

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(v)(t)\| &\le e^{-\sigma t}\|S_\alpha(t)\|\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + e^{-\sigma t}\int_0^t \|S_\alpha(s)\|(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\|(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s)\|\|f(s, v[\varphi]_s)\|ds \\
&\le Me^{-\sigma t}\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + Mte^{-\sigma t}(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\
&\quad + C_\alpha\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}m(s)\Psi(\|v[\varphi]_s\|_{\mathcal{C}_h})ds \\
&\le M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + MC_\sigma(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\
&\quad + C_\alpha\Gamma(\alpha)I_0^{\alpha,\sigma}m(t)\Psi(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + R),
\end{aligned}$$

nhờ đánh giá $te^{-\sigma t} \le C_\sigma, \forall t \in [0,T]$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(v)\|_{C_\varphi} &\le M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + MC_\sigma(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\
&\quad + C_\alpha\Gamma(\alpha)|I_0^{\alpha,\sigma}m|_\infty\Psi(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + R) \\
&\le R.
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 4.1. *Nếu* Ψ *có tăng trưởng kiểu đa thức, thì điều kiện* (4.13) *xảy ra khi* $\|(\varphi, y)\|$ *cũng như* $|I_0^{\alpha,\sigma}m|_\infty$ *nhỏ. Đặc biệt, nếu* $\Psi(r) = r^q$ *với* $q > 1$, *thì* (4.13) *thỏa mãn nếu dữ kiện ban đầu đủ nhỏ, nghĩa là, điều kiện áp đặt lên* $|I_0^{\alpha,\sigma}m|_\infty$ *được giải phóng.*

4.3. TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN

Trong phần này, chúng tôi chứng minh kết quả chính của chương đó là tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm không. Kí hiệu $\mathbb{S}(\xi)$ là tập nghiệm

của bài toán (4.1)-(4.3) với dữ kiện ban đầu $\xi = (\varphi, y)$. Chúng tôi sử dụng khái niệm hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm đối với phương trình (4.1) như sau.

Định nghĩa 4.2. (*Tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn*). Cho $\xi_0 = (\varphi_0, y_0) \in \mathcal{C}_h \times X$. Nghiệm $u \in \mathbb{S}(\xi_0)$ được gọi là

(i) *hút* trên $[0, T]$ nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\| < \|\varphi - \varphi_0\|_{\mathcal{C}_h} + \|y - y_0\|$$

với mọi $\xi = (\varphi, y) \in B_\eta(\xi_0) \setminus \{\xi_0\}$ và $v \in \mathbb{S}(\xi)$, ở đây $B_\eta(\xi_0)$ là hình cầu đóng trong $\mathcal{C}_h \times X$ có tâm tại ξ_0 bán kính η.

(ii) *hút mũ* trên $[0, T]$ nếu

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(\xi_0)} \sup_{v \in \mathbb{S}(\xi)} (\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\|) < 1.$$

Hiển nhiên, từ tính hút mũ suy ra tính hút. Chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho tính hút mũ trong bổ đề sau.

Bổ đề 4.2. *Cho trước $\xi_0 = (\varphi_0, y_0) \in \mathcal{C}_h \times X$. Nghiệm $u \in \mathbb{S}(\xi_0)$ là hút mũ trên $[0, T]$ nếu*

$$\limsup_{\|\xi\| \to 0} \sup_{v \in \mathbb{S}(\xi + \xi_0)} \frac{\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\|}{\|\xi\|} < 1. \tag{4.14}$$

Chứng minh. Lấy $v \in \mathbb{S}(\xi)$ với $\xi = (\varphi, y) \in B_\eta(\xi_0)$. Đặt $\zeta = \xi - \xi_0$, ta có $\zeta \in B_\eta(0)$ và

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(\xi_0)} \sup_{v \in \mathbb{S}(\xi)} (\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\|) \\
&\quad = \sup_{\|\zeta\| < \eta} \sup_{v \in \mathbb{S}(\zeta + \xi_0)} \frac{\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\|}{\|\zeta\|} \frac{\|\zeta\|}{\eta} \\
&\quad \le \sup_{\|\zeta\| < \eta} \sup_{v \in \mathbb{S}(\zeta + \xi_0)} \frac{\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\|}{\|\zeta\|}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(\xi_0)} \sup_{v \in \mathbb{S}(\xi)} (\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(0)\|) \\
&\qquad \le \limsup_{\|\zeta\| \to 0} \sup_{v \in \mathbb{S}(\zeta + \xi_0)} \frac{\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\|}{\|\zeta\|}.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức (4.14), ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 4.3. *Nếu giả thiết* $(\mathbf{A}^*)$ *và* $(\mathbf{F}_a^*)$ *thỏa mãn với* Ψ *Lipschitz địa phương và* $\Psi(r) = \gamma r + o(r)$ *khi* $r \to 0$, *ở đây* γ *là một số không âm, thì*

$$\limsup_{\xi=(\varphi,y)\to 0} \sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)} \|u_t\|_{\mathcal{C}_h} = 0, \forall t \in [0,T].$$

Chứng minh. Giả sử $\xi = (\varphi, y)$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\le e^{-\sigma t}\|S_\alpha(t)\|\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + e^{-\sigma t}\int_0^t \|S_\alpha(s)\|(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\|(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s)\|\|f(s,u_s)\|ds \\
&\le Me^{-\sigma t}\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + Mte^{-\sigma t}(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\
&\quad + C_\alpha \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}m(s)\Psi(\|u_s\|_{\mathcal{C}_h})ds \\
&\le M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + MC_\sigma(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\
&\quad + C_\alpha|m|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Psi(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \sup_{r\in[0,s]}\|u(r)\|)ds.
\end{aligned}$$

Vì số hạng cuối không giảm theo t và Ψ là hàm không giảm, ta có

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)}\sup_{r\in[0,t]}\|u(r)\| &\le M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + MC_\sigma(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\
&\quad + C_\alpha|m|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Psi(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)}\sup_{r\in[0,s]}\|u(r)\|)ds.
\end{aligned}$$

Qua giới hạn khi $\|\xi\| \to 0$, suy ra

$$v(t) \le C_\alpha|m|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Psi(v(s))ds, \tag{4.15}$$

với

$$v(t) = \limsup_{\xi\to 0}\sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)}\sup_{r\in[0,t]}\|u(r)\|. \tag{4.16}$$

Do giả thiết đối với hàm Ψ, tồn tại số $L = L(|v|_\infty)$ sao cho

$$\Psi(v(t)) = |\Psi(v(t)) - \Psi(0)| \le L(|v|_\infty)v(t),\ \forall t \in [0,T].$$

Nên từ (4.15), ta có

$$v(t) \le C_\alpha|m|_\infty L(|v|_\infty)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall kì dị ta có $v = 0$. Lưu ý rằng

$$\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} \le \|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \sup_{r\in[0,t]}\|u(r)\|,$$

từ (4.16) suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 4.2. *Giả thiết đối với hàm Ψ trong Bổ đề 4.3 thỏa mãn trong trường hợp $f(t,0) = 0$ và $f(t,\cdot)$ khả vi tại 0 theo nghĩa Fréchet. Trong trường hợp này, có thể chọn hàm Ψ dạng đa thức.*

Trước hết chúng tôi nghiên cứu tính hút mũ của nghiệm không đối với phương trình (4.1).

Định lí 4.3. *Giả thiết như trong Bổ đề 4.3. Khi đó nghiệm không của* (4.1) *là hút mũ trên $[0,T]$, nếu bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\Phi(T) + \Sigma(T) < 1, \tag{4.17}$$

trong đó

$$\Phi(t) = M \max\{t, 2+\sigma t\} e^{-\sigma(t-h)} E_\alpha\left(t^\alpha \gamma |m|_\infty e^{\sigma h} C_\alpha \Gamma(\alpha)\right),$$

và

$$\begin{aligned}\Sigma(t) = e^{-\sigma t} \max\left\{Ct^{-1} + M\sigma^2 t, M(1+\sigma t)\right\} \\ + \gamma C_\alpha \left(\int_0^t \left[\sigma(t-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-2}\right] e^{-\sigma(t-s)} \Phi(s) ds\right).\end{aligned}$$

Chứng minh. Giả sử $\xi = (\varphi, y) \in \mathcal{C}_h \times X$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$. Khi đó

$$\begin{aligned}u(t+\theta) = e^{-\sigma(t+\theta)} S_\alpha(t+\theta)\varphi(0) + e^{-\sigma(t+\theta)} \int_0^{t+\theta} S_\alpha(s)(y + \sigma\varphi(0)) ds \\ + \int_0^{t+\theta} e^{-\sigma(t+\theta-s)} (g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t+\theta-s) f(s, u_s) ds,\end{aligned} \tag{4.18}$$

với $t \in (h,T]$ và $\theta \in [-h, 0]$. Nhờ giả thiết về dáng điệu của hàm Ψ, ta thấy rằng, với mỗi $\epsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$, sao cho

$$\Psi(r) \le (\gamma + \epsilon) r, \ \forall r \in (0, \delta).$$

Sử dụng Bổ đề 4.3, ta có thể tìm được $\eta > 0$ để $\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} < \delta, \forall u \in \mathbb{S}(\xi)$ miễn là $\|\xi\| < \eta$. Điều này chỉ ra rằng, với $\|\xi\| < \eta$, ta có

$$\|f(t, u_s)\| \le m(t)\Psi(\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}) \le |m|_\infty (\gamma + \epsilon) \|u_s\|_{\mathcal{C}_h}, \forall u \in \mathbb{S}(\xi).$$

Lấy $\xi \in B_\eta(0)$. Khi đó theo (4.18), thì

$$\begin{aligned}\|u(t+\theta)\| \le e^{-\sigma t} e^{\sigma h} M \|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + e^{-\sigma t} e^{\sigma h} M t (\|y\| + \sigma \|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\ + C_\alpha |m|_\infty (\gamma + \epsilon) \int_0^{t+\theta} (t+\theta-s)^{\alpha-1} e^{-\sigma(t+\theta-s)} \|u_s\|_{\mathcal{C}_h} ds, \ \forall t \in (h, T].\end{aligned}$$

Kéo theo

$$\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} \le e^{-\sigma t} e^{\sigma h} M \max\{t; 1+\sigma t\}(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \|y\|)$$
$$+ C_\alpha e^{\sigma h} |m|_\infty (\gamma+\epsilon) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-\sigma(t-s)} \|u_s\|_{\mathcal{C}_h} ds, \ \forall t \in (h, T].$$

Vì vậy

$$e^{\sigma t}\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} \le e^{\sigma h} M \max\{t; 1+\sigma t\}(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \|y\|)$$
$$+ C_\alpha e^{\sigma h} |m|_\infty (\gamma+\epsilon) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \|u_s\|_{\mathcal{C}_h} ds, \ \forall t \in (h, T]. \quad (4.19)$$

Bây giờ ta cần đến một ước lượng cho $e^{\sigma t}\|u_t\|_{\mathcal{C}_h}$ với $t \in [0, h]$. Sử dụng các ước lượng tương tự như trong chứng minh của Bổ đề 4.3, suy ra

$$\|u(t)\| \le M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + Mt(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})$$
$$+ C_\alpha |m|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \Psi(\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}) ds, \ \forall t \in [0, h].$$

Do số hạng cuối không giảm nên

$$\sup_{r\in[0,t]} \|u(t)\| \le M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + Mt(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h})$$
$$+ C_\alpha |m|_\infty (\gamma+\epsilon) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \|u_s\|_{\mathcal{C}_h} ds, \ \forall t \in [0, h].$$

Vì thế

$$\begin{aligned}\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} &\le \|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \sup_{r\in[0,t]} \|u(t)\| \\ &\le 2M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + Mt(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) \\ &\quad + C_\alpha |m|_\infty (\gamma+\epsilon) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \|u_s\|_{\mathcal{C}_h} ds, \ \forall t \in [0, h].\end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned}e^{\sigma t}\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} &\le e^{\sigma t}(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \sup_{r\in[0,t]} \|u(t)\|) \\ &\le e^{\sigma h} M \max\{t; 2+\sigma t\}(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \|y\|) \\ &\quad + C_\alpha e^{\sigma h} |m|_\infty (\gamma+\epsilon) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\sigma s} \|u_s\|_{\mathcal{C}_h} ds, \ \forall t \in [0, h].\end{aligned} \quad (4.20)$$

Từ (4.19) và (4.20), ta được

$$e^{\sigma t}\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} \le e^{\sigma h} M \max\{t; 2+\sigma t\}(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \|y\|)$$

$$+ C_\alpha e^{\sigma h}|m|_\infty(\gamma+\epsilon)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{\sigma s}\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}ds,$$

với mọi $t \in [0,T]$. Áp dụng bất đẳng thức Gronwall kì dị cho bất đẳng thức cuối, để có

$$e^{\sigma t}\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} \le e^{\sigma h}M\max\{t;2+\sigma t\}(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\|y\|)E_\alpha\left(t^\alpha(\gamma+\epsilon)|m|_\infty e^{\sigma h}C_\alpha\Gamma(\alpha)\right).$$

Do đó

$$\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} \le \Phi_\epsilon(t)(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\|y\|), \tag{4.21}$$

trong đó

$$\Phi_\epsilon(t) = M\max\{t;2+\sigma t\}e^{-\sigma(t-h)}E_\alpha\left(t^\alpha(\gamma+\epsilon)|m|_\infty e^{\sigma h}C_\alpha\Gamma(\alpha)\right).$$

Mặt khác, với $t>0$

$$\begin{aligned}
u'(t) = &-\sigma e^{-\sigma t}S_\alpha(t)\varphi(0) + e^{-\sigma t}S'_\alpha(t)\varphi(0) - \sigma e^{-\sigma t}\int_0^t S_\alpha(s)(y+\sigma\varphi(0))ds\\
&+ e^{-\sigma t}S_\alpha(t)(y+\sigma\varphi(0)) - \sigma\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)f(s,u_s)ds\\
&+ \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\frac{d}{dt}\left((g_{\alpha-1}*S_\alpha)(t-s)\right)f(s,u_s)ds.
\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned}
\|u'(t)\| \le\ & e^{-\sigma t}\max\left\{Ct^{-1}+M\sigma^2 t; M(1+\sigma t)\right\}(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\|y\|)\\
&+ (\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\|y\|)\sigma C_\alpha(\gamma+\epsilon)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-\sigma(t-s)}\Phi_\epsilon(s)ds\\
&+ (\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\|y\|)C_\alpha(\gamma+\epsilon)\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}e^{-\sigma(t-s)}\Phi_\epsilon(s)ds\\
=\ & \Sigma_\epsilon(t)(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\|y\|),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

nhờ Định lí 1.6, ở đây

$$\begin{aligned}
\Sigma_\epsilon(t) = &\ e^{-\sigma t}\max\left\{Ct^{-1}+M\sigma^2 t, M(1+\sigma t)\right\}\\
&+ (\gamma+\epsilon)C_\alpha\left(\int_0^t [\sigma(t-s)^{\alpha-1}+(t-s)^{\alpha-2}]e^{-\sigma(t-s)}\Phi_\epsilon(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Kết hợp (4.21)-(4.22), ta có

$$\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} + \|u'(t)\| \le (\Phi_\epsilon(t)+\Sigma_\epsilon(t))(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}+\|y\|),\ \forall t\in(0,T], \tag{4.23}$$

với mọi $\xi = (\varphi, y) \in B_\eta(0)$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$.

Do (4.17), có thể chọn $\epsilon > 0$ sao cho $\Phi_\epsilon(T)+\Sigma_\epsilon(T) < 1$. Từ bất đẳng thức (4.23), ta có điều phải chứng minh. □

Để chứng minh tính hút của nghiệm khác không, chúng ta cần giả thiết sau đây đối với phần phi tuyến.

($\mathbf{F}_b^*$) Hàm $f : [0,T] \times \mathcal{C}_h \to X$ liên tục, thỏa mãn ($\mathbf{F}^*$)(2). Hơn nữa, tồn tại hàm $m \in C([0,T];\mathbb{R}^+)$ và hàm không giảm, Lipschitz địa phương $\Psi \in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ sao cho $\Psi(r) = \gamma r + o(r)$ khi $r \to 0$ với $\gamma \geq 0$, và

$$\|f(t,v_1) - f(t,v_2)\| \leq m(t)\Psi(\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{C}_h}),\ \forall v_1, v_2 \in \mathcal{C}_h.$$

Định lí 4.4. *Nếu các giả thiết* ($\mathbf{A}^*$), ($\mathbf{F}_b^*$) *thỏa mãn và*

$$\Phi(T) + \Sigma(T) < 1,$$

trong đó Φ, Σ *là các hàm đã cho trong Định lí 4.3. Khi đó, mọi nghiệm của phương trình* (4.1) *hút mũ trên* $[0,T]$.

Chứng minh. Lấy $\xi_0 = (\varphi_0, y_0) \in \mathcal{C}_h \times X$ và $u^* \in \mathbb{S}(\xi_0)$. Ta chứng minh tính hút của nghiệm u^*. Giả sử $\xi = (\varphi, y) \in B_\eta(\xi_0)$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$, đặt $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0, \tilde{y} = y - y_0, \tilde{\xi} = \xi - \xi_0$ và $\tilde{u} = u - u^*$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) = e^{-\sigma t}S_\alpha(t)\tilde{\varphi}(0) + e^{-\sigma t}\int_0^t S_\alpha(s)(\sigma\tilde{\varphi}(0) + \tilde{y})ds \\ + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s)[f(t,u_s) - f(t,u_s^*)]ds.\end{aligned}$$

Sử dụng ($\mathbf{F}_b^*$), suy ra

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t)\| = e^{-\sigma t}M\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}_h} + Mte^{-\sigma t}t(\sigma\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}_h} + \|\tilde{y}\|)ds \\ + C_\alpha|m|_\infty\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\Psi(\|\tilde{u}_s\|_{\mathcal{C}_h})ds.\end{aligned}$$

Lí luận tương tự như trong chứng minh của Bổ đề 4.3, ta thấy rằng $\|\tilde{u}_t\|_{\mathcal{C}_h} \to 0$ khi $\tilde{\xi} \to 0$. Phần còn lại của chứng minh được tiến hành tương tự chứng minh của Định lí 4.3. Cuối cùng, ta có

$$\|u_T - u_T^*\|_{\mathcal{C}_h} + \|u'(T) - (u^*)'(T)\| \leq (\Phi_\epsilon(T) + \Sigma_\epsilon(T))(\|\varphi - \varphi_0\|_{\mathcal{C}_h} + \|y - y_0\|),$$

với mọi $\xi = (\varphi, y) \in B_\eta(\xi_0)$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$. Chứng minh kết thúc. □

4.4. ÁP DỤNG

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên trơn $\partial\Omega$. Xét bài toán sau

$$\partial_t^{\alpha,\sigma}u(t,x) = \Delta_x u(t,x)$$

$$+ \tilde{f}\left(t, u(t,x), \int_\Omega k(y)u(t-h,y)dy\right),\ x \in \Omega, t \in [0,T], \tag{4.24}$$

$$u(t,x) = 0,\ x \in \partial\Omega, t > 0, \tag{4.25}$$

$$u(s,x) = \varphi(s,x), x \in \Omega, s \in [-h,0], \tag{4.26}$$

$$\partial_t u(0,x) = y(x), x \in \Omega, \tag{4.27}$$

trong đó $\alpha \in (1,2), \sigma > 0$, $\partial_t^{\alpha,\sigma}$ là đạo hàm phân thứ có trọng theo nghĩa Caputo với bậc α, $\tilde{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và $k \in L^2(\Omega)$.

Lấy $X = L^2(\Omega)$ và $A = \Delta$ với $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Khi đó A là toán tử sinh của nửa nhóm compact $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ (xem [71, Định lí 7.2.5]). Phổ của $-A$ là tập các giá trị riêng của $-A$, gồm các số dương, dễ thấy $0 \in \rho(A)$ và A là một toán tử quạt kiểu $(0,\theta)$ với $\theta = 0$. Vì vậy, A sinh ra α-giải thức compact $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ sở hữu tất cả các tính chất phát biểu trong Định lí 1.5 và 1.6.

Về phần phi tuyến $\tilde{f}$, chúng tôi giả thiết thêm rằng

$$|\tilde{f}(t,y,z)| \leq m(t)|y||z|^p, \forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2, \tag{4.28}$$

với $m \in C([0,T];\mathbb{R}^+),\ p > 0$.

Đặt $\mathcal{C}_h = C([-h,0]; L^2(\Omega))$. Xét hàm số $f : [0,T] \times \mathcal{C}_h \to L^2(\Omega)$ xác định như sau

$$f(t,\phi)(x) = \tilde{f}\left(t, \phi(0,x), \int_\Omega k(y)\phi(-h,y)dy\right).$$

Rõ ràng, bài toán (4.24)-(4.27) là một trường hợp riêng của bài toán (4.1)-(4.2).

Sử dụng (4.28), ta có

$$\begin{aligned}|f(t,\phi)(x)| &\leq m(t)|\phi(0,x)| \left(\int_\Omega |k(y)||\phi(-\rho(0),y)|dy\right)^p \\ &\leq m(t)|\phi(0,x)|\|k\|_X^p \|\phi(-\rho(0),\cdot)\|_X^p,\end{aligned}$$

do bất đẳng thức Hölder. Vì vậy

$$\begin{aligned}\|f(t,\phi)\| &\leq m(t)\|k\|_X^p \|\phi(0,\cdot)\|_X \|\phi(-\rho(0),\cdot)\|_X^p \\ &\leq m(t)\|k\|_X^p \sup_{s\in[-h,0]} \|\phi(s,\cdot)\|_X^{p+1} \\ &= m(t)\|k\|_X^p \|\phi\|_{\mathcal{C}_h}^{p+1}.\end{aligned}$$

Có thể kiểm tra rằng f liên tục, nhờ vào tính liên tục của $\tilde{f}$ và định lí hội tụ trội Lebesgue. Do đó, f thỏa mãn $(\mathbf{F}_a^*)$ với $\Psi(r) = \|k\|_X^p r^{p+1} = o(r)$ khi $r \to 0$. Sử dụng Định lí 4.3, ta suy ra nghiệm không của (4.24) là hút mũ trên $[0, T]$, nếu thỏa mãn

$$M \max\{T, 2 + \sigma T\} e^{\sigma h} + \max\left\{CT^{-1} + M\sigma^2 T, M(1 + \sigma T)\right\} < e^{\sigma T},$$

trong đó $M = \sup_{t\in[0,T]} \|S_\alpha(t)\|$ và $C = \sup_{t\in[0,T]} \|tA(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t)\|$.

Kết luận Chương 4

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn cho phương trình sóng phân thứ có trọng nửa tuyến tính. Các kết quả đạt được bao gồm:

1. Chứng minh được sự tồn tại nghiệm trên đoạn hữu hạn của bài toán (4.1)-(4.3) cho các trường hợp khi phần phi tuyến tăng trưởng dưới tuyến tính và trên tuyến tính. (Định lí 4.1, Định lí 4.2).
2. Chứng minh được tính hút mũ của nghiệm tầm thường và không tầm thường đối với bài toán (4.1)-(4.3) (Định lí 4.3, Định lí 4.4).
3. Một áp dụng cho kết quả trừu tượng được đưa ra ở Mục 4.4.

Theo sự hiểu biết của chúng tôi, các kết quả trong chương này là những nghiên cứu đầu tiên về tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn cho phương trình sóng phân thứ có trọng nửa tuyến tính trong không gian Banach tổng quát. Các kĩ thuật ước lượng và lược đồ chứng minh có thể được sử dụng để nghiên cứu một số lớp bài toán khác.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu nghiệm của phương trình/bao hàm thức vi phân phân thứ chứa trễ trong không gian Banach tổng quát. Các kết quả đạt được bao gồm:

- Đối với lớp phương trình vi tích phân phân thứ có trễ hữu hạn: Chứng minh được tính giải được và tính ổn định tiệm cận của nghiệm.
- Đối với lớp bao hàm thức vi tích phân phân thứ có trễ vô hạn: Chứng minh được sự tồn tại nghiệm tích phân và tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm.
- Với phương trình vi phân phân thứ có trọng: Chứng minh được sự tồn tại nghiệm trên đoạn compact với phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính, đưa ra khái niệm tính hút, hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn cho trường hợp có trễ hữu hạn, nêu ra một điều kiện đủ cho tính hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn và sử dụng nó để thu được tính hút mũ của của nghiệm.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu dáng điệu nghiệm các phương trình và bao hàm thức vi phân phân thứ trong luận án khi không có các giả thiết về độ đo không compact.
- Nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định (thời gian hữu hạn hoặc Lyapunov) của nghiệm cho các hệ vi phân ngẫu nhiên phân thứ.
- Nghiên cứu các vấn đề liên quan như tính chính qui của nghiệm, cấu trúc của tập nghiệm đối với các hệ vi phân phân thứ.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. N.M. Chuong, T.D. Ke, N.N. Quan, *Stability for a class of fractional partial integro-differential equations*, J. Integral Equations Appl. 26 (2014), 145-170.(SCIE).

2. N.T. Anh, T.D. Ke, N.N. Quan. *Weak stability for integro-differential inclusions of diffusion-wave type involving infinite delays*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 21 (2016), 3637-3654.(SCI).

3. T.D. Ke, N.N. Quan. Finite-time attractivity for semilinear tempered fractional wave equations, *submitted*.

Tài liệu tham khảo

[1] B. de Andrade, C. Cuevas (2010), "S-asymptotically ω-periodic and asymptotically ω-periodic solutions to semi-linear Cauchy problems with non-dense domain", *Nonlinear Anal.*, 72(6), 3190-3208.

[2] N.T. Anh, T.D. Ke (2015), "Decay integral solutions for neutral fractional differential equations with infinite delays", *Math. Methods Appl. Sci.*, 38, 1601-1622.

[3] Anthony W. Knapp (2005), *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

[4] E. Ahmed, A. S. Elgazzar (2007), "On fractional order differential equations model for nonlocal epidemics", *Physica A*, 379, 607-614.

[5] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii (1992), *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

[6] E. Bajlekova (2001), *Fractional evolution equations in Banach spaces*, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology.

[7] T.A. Burton (2006), *Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations*, Dover Publications, New York.

[8] T.A. Burton, T. Furumochi (2001), "Fixed points and problems in stability theory for ordinary and functional differential equations", *Dyn. Sys. Appl.*, 10, 89-116.

[9] D. Bothe (1998), "Multivalued Perturbations of m-Accretive Differential Inclusions", *Israel J. Math.*, 108, 109-138.

[10] P. L. Butzer, U. Westphal (2000), *An introduction to fractional calculus*, World Scientific Press, Singapore.

[11] H. Brezis (1973), *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, Math. Studies 5, North-Holland, Amsterdam.

[12] L. Byszewski (1991), "Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem", *J. Math. Anal. Appl.*, 162, 494-505.

[13] M. Chen, W. Deng (2017), "A second-order accurate numerical method for the space-time, tempered fractional diffusion-wave equation", *Appl. Math. Lett.*, 68, 87-93.

[14] N.M. Chuong, T.D. Ke (2012), "Generalized Cauchy problems involving nonlocal and impulsive conditions", *J. Evol. Equ.*, 12(2), 367-392.

[15] C. Cuevas, J. César de Souza (2009), "S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations", *Appl. Math. Lett.*, 22(6), 865-870.

[16] C. Cuevas, J. César de Souza (2010), "Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay", *Nonlinear Anal.*, 72(3-4), 1683-1689.

[17] J.P. Carvalho dos Santos, C. Cuevas (2010), "Asymptotically almost automorphic solutions of abstract fractional integro-differential neutral equations", *Appl. Math. Lett.*, 23(9), 960-965.

[18] E. Cuesta (2007), "Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations", *Discrete Contin. Dyn. Syst.* (Supplement), 277-285.

[19] Chen, Chuang, and Miao Li (2010), *On fractional resolvent operator functions*, Semigroup Forum, Vol. 80. No. 1. Springer-Verlag.

[20] J. Deng, L. Zhao, Y. Wu (2017), "Fast predictor-corrector approach for the tempered fractional differential equations", *Numer Algor*, 74, 717-754.

[21] J. Diestel, W. M. Ruess, W. Schachermayer (1993), "Weak compactness in $L^1(\mu, X)$" , *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118, 447-453.

[22] R.D. Driver (1977), *Ordinary and Delay Differential Equations*, Springer-Verlag, New York Inc..

[23] P. Drábek, J. Milota (2007), *Methods of Nonlinear Analysis. Applications to Differential Equations*, Birkhauser Advanced Texts, Birkhauser, Basel.

[24] I.Ekeland, R.Temam (1999), *Convex analysis and variational problems.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.

[25] Y. Fujita (1990), "Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation", *Osaka J. Math.*, 27, 309-321.

[26] Y. Fujita (1990), "Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation. II", *Osaka J. Math.*, 27, 797-804.

[27] A. F. Filippov (1988), *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Translated from the Russian, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[28] P. Giesl, M. Rasmussen (2012), "Areas of attraction for nonautonomous differential equations on finite time intervals", *J. Math. Anal. Appl.*, 390, 27-46.

[29] C. Gori, V. Obukhovskii, M. Ragni, P. Rubbioni (2002), "Existence and continuous dependence results for semilinear functional differential inclusions with infinite delay", *Nonlinear Anal.*, 51, 765-782.

[30] A. Hanyga (2001), "Wave propagation in media with singular memory", *Math. Comput. Model*, 34, 1399-1421.

[31] Halanay, Aristide, and Vl Rasvan (2012), *Applications of Liapunov methods in stability*, Vol. 245, Springer Science & Business Media.

[32] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel (1993), *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer.

[33] J. Hale, J. Kato (1978), "Phase space for retarded equations with infinite delays" , *Funkcial. Ekvac.*, 21, 11-41.

[34] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel (1993), *Theory of Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York.

[35] E.M. Hernández (2003), "Existence of solutions to a second order partial differential equation with nonlocal conditions", *J. Differential Equations*, 51, 1-10.

[36] Hien. L. V. (2014), "An explicit criterion for finite-time stability of linear nonautonomous systems with delays", *Appl. Math. Lett.*, 30, 12-18.

[37] R. Hilfer (ed.)(2000), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore.

[38] Y. Hino, S. Murukami, T. Naito (1991), *Functional Differential Equations with Unbounded Delay*, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1473, Springer-Verlag, Berlin.

[39] G.-F. Jesús (2008), "Existence results and asymptotic behavior for nonlocal abstract Cauchy problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 338, 639-652.

[40] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca (2001), *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, in: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 7, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[41] T.D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong, J.-C. Yao (2012), "On semilinear integro-differential equations with nonlocal conditions in Banach spaces", *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 137576, 26 pages.

[42] L. Kexue, P. Jigen, G. Jinghuai (2013), "Controllability of Nonlocal Fractional Differential Systems of Order $\alpha \in (1, 2)$ in Banach Spaces" , *Reports on Mathematical Physics*, 71, 33-43.

[43] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo (2006), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam.

[44] V. Kiryakova (1994), *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Longman & Wiley, Harlow, New York.

[45] S. Kumar and N. Sukavanam (2012), "Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay", *J. Differ. Equations*, 252, 6163–6174.

[46] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P. S. Simeonov (1989), *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ.

[47] Y.-N. Li, H.-R. Sun, Z.S. Feng (2016), "Fractional abstract Cauchy problem with order $\alpha \in (1, 2)$", *Dynamics of PDE*, 13, 155-177.

[48] J.H. Liu (2003), "A remark on the mild solutions of non-local evolution equations", *Semigroup Forum*, 66, 63-67.

[49] C. Li, W. Deng (2016), "High order schemes for the tempered fractional diffusion equations", *Adv. Comput. Math.*, 42, 543-572.

[50] F. Mainardi, P. Paradisi (2001), "Fractional diffusive waves", *J. Comput. Acoustics*, 9, 1417-1436.

[51] F. Mainardi (1997), *Fractional calculus, some basic problems in continuumand statisticalmechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics"* (edited by A. Carpinteri and F. Mainardi), pp. 291-348, Springer-Verlag,Wien.

[52] F. Metzler, W. Schick, H.G. Kilian, T.F. Nonnenmache (1995), "Relaxation in filled polymers: a fractional calculus approach", *J. Chem. Phys.*, 103, 7180-7186.

[53] R. Metzler and J. Klafter (2000), "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach", *Physics Reports*, 339, 1-77.

[54] R. Metzler and J. Klafter (2000), "Accelerating Brownian motion: a fractional dynamics approach to fast diffusion", *Europhys. Lett.*, 51, 492-498.

[55] M.M. Meerschaert, F. Sabzikar, M.S. Phanikumar, A. Zeleke (2014), "Tempered fractional time series model for turbulence in geophysical flows", *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 14, 1742-5468.

[56] M.M. Meerschaert, Y. Zhang, B. Baeumer (2008), "Tempered anomalous diffusion in heterogeneous systems", *Geophys. Res. Lett.*, 35, L17403.

[57] K. S. Miller, B. Ross (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[58] R.R. Nigmatullin (1986), "The realization of the generalized transfer equation in a mediumwith fractal geometry", *Phys. Status Solidi B*, 133, 425-430.

[59] K.B. Oldham and J. Spanier (1974), *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York.

[60] J.-S. Pang, D.E.Steward (2008), "Differential variational inequalities", *Math. Program. Ser. A*, 113, 345-424.

[61] A. Pazy (1983), *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York.

[62] D. Prato, and G. M. Iannelli (1980), "Linear integrodifferential equations in Banach space", *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 62, 207-219.

[63] P.D. Phung, L.X. Truong (2013), "On a fractional differential inclusion with integral boundary conditions in Banach space", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16, 538-558.

[64] I. Podlubny (1999), *Fractional differential equations*, Academic Press, New York.

[65] I. Podlubny (1999), *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, San Diego, CA.

[66] R. Sakthivel, Y. Ren and N. I. Mahmudov (2011), "On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems", *Comput. Math. Appl.*, 62, 1451-1459.

[67] F. Sabzikar, M.M. Meerschaert, J.H. Chen (2015), "Tempered fractional calculus", *J. Comput. Phys.*, 293, 14-28.

[68] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev (1993), *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam.

[69] K.Sakamoto, M.Yamamoto (2011), "Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 382, 426-447.

[70] T.I. Seidman (1987), "Invariance of the reachable set under nonlinear perturbations", *SIAM J. Control Optim.*, 25(5), 1173-1191.

[71] I.I. Vrabie (2003), *C_0-Semigroups and Applications*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[72] R.-N. Wang, D.-H. Chena, T.-J. Xiao (2012), "Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators" , *J. Differential Equations*, 252, 202-235.

[73] J. Wang and Y. Zhou (2012), "Complete controllability of fractional evolution systems" , *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.*, 17, 4346-4355.

[74] J. Wang and Y. Zhou (2011), "Existence and controllability results for fractional semilinear differential inclusions" , *Nonlinear Anal.: RWA.*, 12, 3642–3653.

[75] L. Weiss, E. F. Infante (1967), "Finite-Time Stability under Perturbing forces and on Product Spaces", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 12 5459.

[76] H. Ye, J. Gao and Y. Ding (2007), "A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation", *J. Math. Anal. Appl.*, 328, 1075-1081.