BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN NHƯ QUÂN

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÀ BAO HÀM THỨC VI PHÂN PHÂN THỨ CHỨA TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2018

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Trần Đình Kế
TS. Nguyễn Thành Anh

Phản biện 1: GS.TSKH. Đinh Nho Hào, Viện Toán học.

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Sinh Bảy, Trường Đại học Thương Mại.

Phản biện 3: PGS. TS. Cung Thế Anh, Trường ĐHSP Hà Nội.

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi .... giờ .... ngày .... tháng .... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện: Thư viện Quốc Gia, Hà Nội
hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan về vấn đề nghiên cứu và lí do chọn đề tài

Giải tích phân thứ được cho là bắt nguồn từ câu hỏi đưa ra vào năm 1695 bởi L´Hospital và Leibniz. Đó là làm thế nào để khái quát hóa các khái niệm của giải tích bậc nguyên cho trường hợp có bậc bất kỳ? Qua lịch sử hơn ba thế kỷ hình thành và phát triển, trong một thời gian dài ta thấy rằng giải tích phân thứ chủ yếu thu hút sự quan tâm của các nhà toán học, do chưa biết nhiều đến các ứng dụng của nó vào trong thực tiễn và các lĩnh vực khoa học khác. Tuy nhiên, trong những thập kỷ gần đây có nhiều nhà nghiên cứu đã dành sự quan tâm cho giải tích phân thứ khi thấy rằng đạo hàm và tích phân phân thứ là công cụ có thể mô tả tốt hơn nhiều hiện tượng trong thế giới tự nhiên và trong kỹ thuật như là: hệ nhớt đàn hồi, sự phân cực chất điện môi, sóng điện từ, sự truyền nhiệt, kỹ thuật chế tạo người máy, hệ sinh học, tài chính và một số lĩnh vực khác (xem Ahmed (2007), Butzer và Hilfer (2000), Kilbas (2006)). Trong lịch sử, giải tích phân thứ đã thu hút được sự chú ý của nhiều nhà toán học tiên phong như Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Laurant, Hardy, và Riesz.... Các ứng dụng của giải tích phân thứ trong vật lý đầu tiên được thực hiện bởi Abel và Heaviside. Ngày nay, phương trình vi phân phân thứ có ứng dụng rộng rãi trong hầu hết các lĩnh vực khoa học. Trong nhiều ứng dụng thực tế, sử dụng phương trình vi phân phân thứ mang lại hiệu quả tốt hơn so với phương trình vi phân cổ điển.

Lý thuyết định tính và ứng dụng của phương trình vi phân phân thứ trong vật lý, kỹ thuật, kinh tế, sinh học và sinh thái học được nghiên cứu rộng rãi, có thể tìm thấy trong các công trình Kiryakova (1994), Mainardi (1997), Metzler (1995), MilRos và Samko (1993) và các trích dẫn trong đó. Khi xem xét các mô hình thực tiễn, đặc biệt trong các bài toán điều khiển thì trễ là một nhân tố không thể tách rời. Do đó, các hệ có trễ thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học, ở đó việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm là một trong những bài toán quan trọng và hấp dẫn nhất.

Trong nhiều mô hình ứng dụng, người ta sử dụng phương trình vi phân đạo hàm riêng phân thứ dạng

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = \Delta u(t,x) \tag{1}$$

với bậc đạo hàm $\alpha \in (0,2]$, Δ là toán tử Laplace. Trường hợp $\alpha \in (0,1)$, nó là phương trình dưới khuếch tán, được ứng dụng trong vật lý bởi Nigmatullin (1986) để mô tả quá trình khuếch tán trong môi trường vật liệu fractal (một dạng đặc biệt của vật liệu xốp). Trường hợp $\alpha \in (1,2)$, nó là phương trình sóng phân thứ, mô tả sự lan truyền của sóng cơ trong vật liệu nhớt đàn hồi.

Lý thuyết cơ sở về phương trình vi phân phân thứ đã được phát triển và trình bày trong nhiều tài liệu, có thể kể đến các cuốn sách tiêu biểu Kilbas (2006), MilRos (1993), Podlubny (1999). Những kết quả gần đây về phương trình vi phân phân thứ chủ yếu dành cho tính giải được trong khoảng thời gian hữu hạn (xem Phung (2013), R.N.Wang (2011), J. Wang (2012) và các tài liệu tham khảo trong đó) và tính điều khiển được (chính xác hoặc xấp xỉ, xem Sakthivel (2011), J. Wang (2011, 2012)). Trong khi lý

thuyết ổn định cho phương trình vi phân bậc nguyên có lịch sử phát triển lâu dài và đạt được nhiều kết quả quan trọng (xem Driver (1977), Drabek (2007), Hale (1993) cùng với các trích dẫn) thì các kết quả về tính ổn định đối với các phương trình vi phân phân thứ còn ít được biết đến. Trên thực tế, việc sử dụng các công cụ phổ biến như phương pháp hàm Lyapunov cho các phương trình vi phân phân thứ gặp nhiều khó khăn do việc tính đạo hàm phân thứ của các phiếm hàm Lyapunov rất khó thực hiện.

Quay lại phương trình (1) trong trường hợp $\alpha \in (1,2)$, một dạng tương tự của nó được xem xét là

$$\partial_t u(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \Delta u(s,x) ds. \tag{2}$$

Phương trình này được gọi là phương trình tán xạ-sóng (một dạng trung gian giữa phương trình khuếch tán ($\alpha = 1$), và phương trình sóng ($\alpha = 2$)), được Fujita nghiên cứu lần đầu năm 1990. Phương trình với nhiễu phi tuyến tương ứng dạng

$$\partial_t u(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \Delta u(s,x) ds + f(u(t,x)), \tag{3}$$

mô tả quá trình khuếch tán kỳ dị và sự truyền sóng trong vật liệu nhớt đàn hồi (xem Hilfer (2000), Mainardi (2001), Metzler (2000)). Để nghiên cứu lớp phương trình này, ta thường chuyển nó về phương trình vi phân trong không gian Banach. Cụ thể, ta có thể coi $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$ là hàm theo biến t nhận giá trị trong $L^2(\Omega)$ xác định bởi $u(t) = u(t,\cdot)$. Khi đó, phương trình (3) có thể viết dưới dạng phương trình vi phân trừu tượng

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s) ds + f(t,u(t)), \tag{4}$$

trong đó $A = \Delta$ với miền xác định phù hợp theo điều kiện biên và $f(t,u(t)) = f(t,\cdot,u(t,\cdot))$. Gần đây, vấn đề nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm đối với lớp phương trình này nhận được sự quan tâm của một số nhà nghiên cứu, tuy nhiên kết quả đạt được còn hạn chế. Theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có kết quả nào về tính ổn định nghiệm của phương trình dạng (4) được công bố. Chính vì vậy chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm đối với bài toán tổng quát sau trong không gian Banach X:

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s) ds + f(t,u(t),u_t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{5}$$

$$u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), k \in \Lambda, \tag{6}$$

$$u(\bar{s}) + g(u)(\bar{s}) = \varphi(\bar{s}), \bar{s} \in [-h,0], \tag{7}$$

ở đây A là toán tử tuyến tính, đóng và không bị chặn, f là hàm phi tuyến xác định trên $\mathbb{R}^+ \times X \times \mathcal{C}_h$, hàm không cục bộ $g : \mathcal{PC}([-h,T];X) \to \mathcal{C}_h$ và hàm xung $I_k : X \to X, k \in \Lambda$ với $\Lambda \subset \mathbb{N}$ là một tập chỉ số. Ký hiệu $u(t_k^+)$, $u(t_k^-)$ tương ứng là giới hạn phải và trái của u tại t_k; u_t là quá khứ của hàm trạng thái tính tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(\bar{s}) = u(t+\bar{s}), \bar{s} \in [-h,0]$.

Bài toán Cauchy với điều kiện không cục bộ hay điều kiện xung đã nhận được nhiều quan tâm của các nhà nghiên cứu trong những năm gần đây. Điều kiện không cục bộ dạng (7) cho ta mô tả tốt hơn các mô hình thực tế so với điều kiện ban đầu cổ điển, ví

dụ như điều kiện

$$u(s) + \sum_{i=1}^{M} c_i u(\tau_i + s) = \varphi(s)$$

cho phép mô tả những đo đạc bổ sung tại một số thời điểm thay vì chỉ đo tại thời điểm ban đầu. Ý nghĩa vật lý và những kết quả nghiên cứu đầu tiên về bài toán không cục bộ đã được trình bày trong Byszewski (1991). Sau đó, các bài toán khác nhau với điều kiện không cục bộ liên quan đến các phương trình vi phân bậc nguyên, và các bao hàm thức vi phân bậc nguyên nhận được sự quan tâm rất lớn của các nhà nghiên cứu. Liên quan đến các kết quả về tính giải được, chúng tôi trích dẫn các công trình Chuong (2012), Hernández (2003), Jesús (2008), Ke (2012), Liu (2003). Mặt khác, điều kiện xung dạng (6) thường được sử dụng để mô tả các hệ động lực có trạng thái thay đổi đột ngột. Về lý thuyết các hệ vi phân chứa xung, có thể tham khảo tài liệu Lakshmikantham (1989). Rõ ràng, bài toán Cauchy tổng quát với điều kiện không cục bộ và hiệu ứng xung đóng một vai trò quan trọng trong việc mô tả nhiều bài toán thực tế.

Dựa trên nguyên lí điểm bất động, chúng tôi chứng minh nghiệm không của bài toán (5)-(7) có tính hút toàn cục, nghĩa là $u(t) \to 0$ khi $t \to +\infty$ với mọi dữ kiện ban đầu bị chặn φ. Lưu ý rằng, nếu một nghiệm của (5)-(7) có tính tiêu hao thì nó cũng ω-tuần hoàn S-tiệm cận (xem Andrade (2010) Cuevas (2009, 2010)).

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng lớp phương trình (4) cho trường hợp phần phi tuyến là hàm đa trị với trễ vô hạn

$$u'(t) \in \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + F(t, u_t), t > 0, \tag{8}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{9}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính đóng và không bị chặn, F là một ánh xạ đa trị xác định trên một tập con của $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ là không gian pha định nghĩa trong Chương 1. Ở đây $\alpha \in (1, 2)$ và u_t là quá khứ của hàm trạng thái cho tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(s) = u(t + s), s \leq 0$.

Trong bài toán này, hàm F phi tuyến sinh ra từ hệ điều khiển với phản hồi đa trị (Kamenskii (2001)), và nhiều bài toán khác như bài toán chính quy hóa phương trình vi phân với vế phải không liên tục (Filippov (1988)), hoặc từ bài toán liên quan đến bất đẳng thức vi biến phân (Pang (2008)). Trễ vô hạn thường xuất hiện trong các bài toán điều khiển, khi nhân tố điều khiển lấy thông tin từ quá khứ của hệ nhưng không có thông tin về thời điểm bắt đầu xuất hiện trễ. Mục đích chính của chúng tôi khi nghiên cứu bài toán này là phân tích tính *ổn định tiệm cận yếu* của nghiệm không, đối với hệ (8)-(9) dựa trên khái niệm sau:

Kí hiệu $\Sigma(\varphi)$ là tập nghiệm của hệ (8)-(9) với điều kiện ban đầu φ. Giả sử rằng $0 \in \Sigma(0)$, tức là (8) có nghiệm không. Nghiệm không của (8) được gọi là *ổn định tiệm cận yếu* nếu

1) *Ổn định*, nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $|\varphi|_{\mathcal{B}} < \delta$ thì $|u_t|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$, với mọi $u \in \Sigma(\varphi), t > 0$;

2) *Hút yếu*, nghĩa là với mỗi $\varphi \in \mathcal{B}$, tồn tại $u \in \Sigma(\varphi)$ sao cho $|u_t|_{\mathcal{B}} \to 0$ khi $t \to +\infty$.

Chúng tôi đưa ra khái niệm này dựa trên khái niệm ổn định yếu của Filippov cho hệ vi phân thường không chứa trễ. Rõ ràng khái niệm ổn định tiệm cận yếu phù hợp cho các hệ vi phân mà tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy không được đảm bảo, đặc biệt là các bao hàm thức vi phân.

Để chứng minh tính ổn định tiệm cận yếu, chúng tôi sử dụng nguyên lý điểm bất động cho ánh xạ nén trên không gian các hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}^+$. Cụ thể, dựa vào dáng điệu của α-giải thức $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi phần tuyến tính, chúng tôi xây dựng không gian nghiệm thích hợp, định nghĩa một độ đo không compact mới trên không gian nghiệm $C_g([0,\infty);X)$ để xác định một tiêu chuẩn compact trên không gian này, sau đó chứng minh toán tử nghiệm có tính nén.

Với cách tiếp cận này, trong trường hợp α-giải thức có tăng trưởng mũ, chúng tôi chứng minh được rằng bài toán (8)-(9) có nghiệm bị chặn mũ. Tiếp theo, khi α-giải thức ổn định tiệm cận, chúng tôi chứng minh tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm không.

Mở rộng khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ, giải tích phân thứ có trọng đã được phát triển để nghiên cứu một số bài toán liên quan đến vật liệu xốp (Hanyga (2001)), dòng chảy địa vật lý (Meerschaert (2014)), thủy văn nước ngầm (Meerschaert (2008)),... Có thể tìm hiểu thêm các mục tiêu và lý do mở rộng giải tích phân thứ trong công trình Sabzikar (2015). Phương trình vi phân phân thứ có trọng là chủ đề được quan tâm trong hơn một thập kỷ qua, trong đó một số kết quả về tính giải được, phương pháp giải số đã được thiết lập (Chen (2017), Deng (2017), Li (2016)).

Mở rộng khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ, giải tích phân thứ có trọng đã được phát triển để nghiên cứu một số bài toán liên quan đến vật liệu xốp, dòng chảy địa vật lí, thủy văn nước ngầm .v.v. Trong trường hợp này, thay vì xét phương trình (1), người ta xét phương trình

$$D^{\alpha,\sigma}u(t) = Au(t) + f(t,u_t),\ t\in[0,T], \tag{10}$$

$$u(s) = \varphi(s), s\in[-h,0], \tag{11}$$

$$u'(0) = y, \tag{12}$$

ở đây $\alpha\in(1,2), \sigma>0$, $D^{\alpha,\sigma}$ là đạo hàm phân thứ có trọng với bậc α theo nghĩa Caputo, hàm trạng thái u nhận giá trị trong không gian Banach X với trễ $u_t\in C([-h,0];X)$ xác định bởi $u_t(s)=u(t+s), s\in[-h,0]$, A là một toán tử tuyến tính đóng trên X và hàm phi tuyến f được xác định trên $[0,T]\times C([-h,0];X)$.

Ở đây, mục tiêu của chúng tôi là chứng minh tính giải được của bài toán (10)-(12) dưới các thiết lập tổng quát (không có điều kiện Lipschitz đối với f cũng như tính compact của nửa nhóm sinh bởi A, các tình huống này đã được thảo luận trong Feng (2016) đối với trường hợp $\sigma=0$). Thêm nữa, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu nghiệm của (10) thông qua khái niệm tính hút trong thời gian hữu hạn được đưa ra trong Giesl (2012). Có thể thấy rằng, dáng điệu tiệm cận của nghiệm của các hệ vi phân khi thời gian đủ lớn đã được nghiên cứu qua hàng thế kỷ, thu được nhiều thành tựu có tính hệ thống và đóng một vai trò quan trọng trong nhiều bài toán thực tiễn. Tuy nhiên, trong nhiều ứng dụng khi hiện tượng chỉ xảy ra trong thời gian ngắn thì việc phân tích dáng điệu của nghiệm trong khoảng thời gian hữu hạn lại đóng vai trò quan trọng và đang thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học.

Trong nội dung này chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm bằng cách sử dụng định

lí điểm bất động cho ánh xạ nén, điều này yêu cầu hàm phi tuyến f phải thỏa mãn tính chính quy được thể hiện thông qua độ đo không compact Hausdorff. Chú ý rằng, trong thiết lập của chúng tôi, hàm f có thể tăng trưởng trên tuyến tính. Để đạt được kết quả về tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm, chúng tôi thực hiện một số ước lượng cục bộ (ước lượng với dữ kiện ban đầu nhỏ) và sử dụng bất đẳng thức Gronwall kì dị. Cuối cùng chúng tôi áp dụng kết quả trừu tượng cho một lớp phương trình đạo hàm riêng phân thứ có trọng theo biến thời gian.

2. Mục đích – Đối tượng – Phạm vi nghiên cứu của luận án

2.1. Mục đích nghiên cứu: Nghiên cứu dáng điệu nghiệm của một số hệ vi phân phân thứ có trễ theo cách tiếp cận của lý thuyết ổn định.

Đầu tiên chúng tôi nghiên cứu tính ổn định của nghiệm đối với lớp phương trình vi tích phân phân thứ bao gồm hiệu ứng xung và điều kiện không cục bộ với trễ hữu hạn. Sau đó, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường cho bao hàm thức vi tích phân phân thứ chứa trễ vô hạn. Cuối cùng luận án đạt được một số kết quả về tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn đối với phương trình sóng phân thứ có trọng, nửa tuyến tính với trễ hữu hạn và phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính.

2.2. Đối tượng nghiên cứu: Trong luận án này, tác giả xét ba lớp bài toán:

* **Lớp thứ nhất:** Phương trình vi tích phân phân thứ dạng tán xạ-sóng với trễ hữu hạn.

* **Lớp thứ hai:** Bao hàm thức vi tích phân phân thứ dạng tán xạ-sóng với trễ vô hạn.

* **Lớp thứ ba:** Phương trình sóng phân thứ có trọng nửa tuyến tính với trễ hữu hạn.

2.3. Phạm vi nghiên cứu: Phạm vi nghiên cứu của luận án được thể hiện thông qua các nội dung sau

* **Nội dung 1:** Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các phương trình và bao hàm thức vi phân phân thứ với trễ hữu hạn và vô hạn.

* **Nội dung 2:** Nghiên cứu tính ổn định của nghiệm đối với lớp phương trình vi tích phân phân thứ bao gồm hiệu ứng xung và điều kiện không cục bộ với trễ hữu hạn.

* **Nội dung 3:** Nghiên cứu tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm đối với bao hàm thức vi tích phân phân thứ dạng sóng khuếch tán với trễ vô hạn.

* **Nội dung 4:** Nghiên cứu tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm đối với phương trình vi phân phân thứ có trọng (tempered) với trễ hữu hạn.

3. Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng các công cụ của giải tích đa trị, lí thuyết nửa nhóm, giải tích phân thứ, lí thuyết điểm bất động, để thực hiện các nội dung nghiên cứu nêu trên. Ngoài ra đối với các nội dung cụ thể, chúng tôi sử dụng một số kỹ thuật tương ứng:

- Nghiên cứu tính giải được của các bài toán phi tuyến: Phương pháp ước lượng theo độ đo không compact.
- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm phân rã và tốc độ phân rã cũng như tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm: Sử dụng cách tiếp cận của Burton và Furumochi, kỹ thuật về ước lượng độ đo không compact và các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén.
- Nghiên cứu tính hút trong thời gian hữu hạn dựa trên khái niệm được đưa ra bởi Giesl và Rasmussen.

4. Cấu trúc và các kết quả của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình đã công bố và Tài liệu tham khảo, luận án được chia làm bốn chương: Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị. Chương 2 chứng minh tính ổn định của nghiệm cho một lớp phương trình vi tích phân phân thứ với trễ hữu hạn. Chương 3 nghiên cứu tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm cho một lớp bao hàm thức vi tích phân phân thứ với trễ vô hạn. Chương 4 với phương trình vi phân phân thứ có trọng và trễ hữu hạn, chúng tôi chứng minh tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm khi phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính.

5. Ý nghĩa của các kết quả của luận án

Các kết quả thu được trong luận án góp phần làm phong phú thêm hướng nghiên cứu ổn định nghiệm cho các phương trình và bao hàm thức vi tích phân phân thứ có trễ trong trong không gian Banach tổng quát, có thể áp dụng cho nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cũng như các hệ vi phân thường có trễ.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các kết quả về giải tích phân thứ, lí thuyết giải thức, lí thuyết độ đo không compact (MNC) và ánh xạ nén, một số kiến thức về giải tích đa trị.

1.1. GIẢI TÍCH BẬC PHÂN SỐ

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và tính chất liên quan đến đạo hàm, tích phân phân thứ và phân thứ có trọng.

1.2. LÍ THUYẾT GIẢI THỨC

Mục này trình bày một số khái niệm cơ bản và một vài kết quả liên quan đến họ cosine, nửa nhóm và giải thức.

1.3. ĐỘ ĐO KHÔNG COMPACT VÀ CÁC ƯỚC LƯỢNG

Trong mục này, chúng tôi trình bày khái niệm độ đo không compact và một số ước lượng liên quan đến độ đo không compact Hausdorff.

1.4. ÁNH XẠ NÉN VÀ CÁC ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

1.4.1. Một số vấn đề về giải tích đa trị

Trình bày về một số khái niệm và kết quả của giải tích đa trị. Trong đó có khái niệm hàm chọn của hàm đa trị, sự tồn tại hàm chọn và một số kết quả then chốt.

1.4.2. Ánh xạ nén và một số định lí điểm bất động

Trong mục này, chúng tôi trình bày về nguyên lí điểm bất động cho ánh xạ nén.

1.5. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC HỆ VI PHÂN

Ở đây chúng tôi nhặc lại các khái niệm ổn định Lyapunov, ổn định yếu, ổn định thời gian hữu hạn, tính hút trong thời gian hữu hạn và một số tính chất liên quan đến các khái niệm này.

1.6. MỘT SỐ KẾT QUẢ BỔ TRỢ

1.6.1. Các không gian hàm

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số không gian hàm cần dùng trong luận án như: $L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$; $L^\infty(\Omega)$; $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Các không gian hàm phụ thuộc thời gian, như $C([a,b];E)$; $L^p(a,b;E)$; $\mathcal{C}_h := C([-h,0];E)$, $h > 0$ cho trước, ở đó E là không gian Banach. Đặc biệt, chúng tôi trình bày về không gian pha kiểu Hale-Kato $\mathcal{B}$.

1.6.2. Một số bất đẳng thức thường dùng

Nhắc lại một số bất đẳng thức được sử dụng trong luận án: bất đẳng thức Hölder và một vài dạng của bất đẳng thức Gronwall.

Chương 2

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TÁN XẠ-SÓNG NỬA TUYẾN TÍNH CHỨA XUNG VÀ TRỄ HỮU HẠN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu lớp phương trình vi tích phân phân thứ với hiệu ứng xung và điều kiện không cục bộ, trong đó phần tuyến tính có dạng tán xạ-sóng. Mục đích là đưa ra các kết quả về sự tồn tại nghiệm cùng với tính ổn định của nghiệm tích phân đối với bài toán trên bằng phương pháp điểm bất động.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm đối với bài toán sau:

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u(t), u_t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{2.1}$$

$$u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), k \in \Lambda, \tag{2.2}$$

$$u(\bar{s}) + g(u)(\bar{s}) = \varphi(\bar{s}), \bar{s} \in [-h, 0], \tag{2.3}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính đóng và không bị chặn, f là hàm phi tuyến xác định trên $[0, +\infty) \times X \times C([-h, 0]; X)$, $g : \mathcal{PC}([-h, T]; X) \to C([-h, 0]; X)$ là hàm không cục bộ và hàm xung cho bởi $I_k : X \to X$. Chúng tôi xét bài toán trên với $\alpha \in (1, 2)$ và $\Lambda \subset \mathbb{N}$ là một tập chỉ số. Ký hiệu $u(t_k^+)$ và $u(t_k^-)$ tương ứng là giới hạn phải và trái của u tại t_k; u_t là quá khứ của hàm trạng thái tính tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(\bar{s}) = u(t + \bar{s}), \bar{s} \in [-h, 0]$.

2.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TÍCH PHÂN

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3) trên đoạn $[0, T]$. Giả thiết:

(A) *A là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, sao cho α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn.*

(F) *Hàm phi tuyến $f : \mathbb{R}^+ \times X \times \mathcal{C}_h \to X$ thỏa mãn:*

(1) *$f(\cdot, v, w)$ đo được với mỗi cặp $(v, w) \in X \times \mathcal{C}_h$, $f(t, \cdot, \cdot)$ liên tục với hầu khắp $t \in [0, T]$ và*

$$\|f(t, v, w)\|_X \leq k(t)\Psi_f(\|v\|_X + \|w\|_{\mathcal{C}_h}),$$

$\forall (v, w) \in X \times \mathcal{C}_h$, ở đây $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, Ψ_f là hàm giá trị thực liên tục, không giảm;

(2) *tồn tại hàm* $m : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^+$, *sao cho* $m(t,\cdot) \in L^1(0,t), t > 0$, *và với mọi tập con bị chặn* $V \subset X, W \subset \mathcal{C}_h$,

$$\chi(S_\alpha(t-s)f(s,V,W)) \le m(t,s)[\chi(V) + \chi_h(W)],$$

hầu khắp $t, s \in [0,T], s \le t$.

(**I**) *Hàm xung* $I_k : X \to X, k \in \Lambda$, *thỏa mãn:*

(1) I_k *liên tục và tồn tại số* $l_k \ge 0$ *thỏa mãn*

$$\|I_k(x)\| \le l_k \Psi_I(\|x\|),$$

ở đây Ψ_I *là hàm giá trị thực liên tục, không giảm;*

(2) *tồn tại số* $\mu_k \ge 0$, *sao cho*

$$\chi(I_k(V) \le \mu_k \chi(V),$$

với mọi tập bị chặn $V \subset X$.

(**G**) *Hàm không cục bộ* $g : \mathcal{PC}([-h,T];X) \to \mathcal{C}_h$ *thỏa mãn các điều kiện:*

(1) g *liên tục và*

$$\|g(u)\|_{\mathcal{C}_h} \le \Psi_g(\|u\|_{\mathcal{PC}}),$$

$\forall u \in \mathcal{PC}$, *ở đây* Ψ_g *là hàm liên tục, không giảm trên* $\mathbb{R}^+$;

(2) *tồn tại* $\eta \ge 0$, *sao cho với mọi tập bị chặn* $D \subset \mathcal{PC}([-h,T];X)$,

$$\chi_h(g(D)) \le \eta \chi_{\mathcal{PC}}(D).$$

Sau đây là định nghĩa về nghiệm tích phân của hệ (2.1)-(2.3).

Định nghĩa 2.1. Hàm $u \in \mathcal{PC}([-h,T];X)$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (2.1)-(2.3) trên đoạn $[-h,T]$ nếu và chỉ nếu $u(t) = \varphi(t) - g(u)(t)$ với $t \in [-h,0]$, và

$$u(t) = S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k) I_k(u(t_k)) + \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s,u(s),u_s)ds,$$

với mỗi $t \in [0,T]$.

Xét $\mathcal{F} : \mathcal{PC}([-h,T];X) \to \mathcal{PC}([-h,T];X)$, xác định bởi

$$\mathcal{F}(u)(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(u)(t), & t \in [-h,0], \\ S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k) I_k(u(t_k)) \\ \qquad + \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s,u(s),u_s)ds, & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Khi đó, u là một nghiệm tích phân của (2.1)-(2.3) nếu nó là một điểm bất động của *toán tử nghiệm* $\mathcal{F}$.

Bổ đề sau đây ta chứng minh tính nén của toán tử nghiệm.

Bổ đề 2.1. *Với các giả thiết* (**A**), (**F**), (**G**) *và* (**I**). *Khi đó*

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}(D)) \leq \left[\left(\eta + \sum_{t_k\in[0,T]} \mu_k\right) S_\alpha^T + 8 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds\right] \chi_{\mathcal{PC}}(D),$$

với mọi tập bị chặn $D \subset \mathcal{PC}([-h,T];X)$, *ở đây* $S_\alpha^T = \sup_{t\in[0,T]} \|S_\alpha(t)\|$.

Sử dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ nén, ta được kết quả sau về sự tồn tại nghiệm tích phân.

Định lí 2.1. *Nếu các giả thiết trong Bổ đề 2.1 được thỏa mãn thì bài toán* (2.1)-(2.3) *có ít nhất một nghiệm tích phân trong* $\mathcal{PC}([-h,T];X)$, *với điều kiện*

$$\left(\eta + \sum_{t_k\in[0,T]} \mu_k\right) S_\alpha^T + 8 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t m(t,s)ds < 1, \tag{2.4}$$

và

$$\begin{aligned}\liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\Bigg[\Bigg(\Psi_g(r) + \Psi_I(r) \sum_{t_k\in[0,T]} l_k\Bigg) S_\alpha^T \\ + \Psi_f(2r) \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| k(s)ds\Bigg] < 1,\end{aligned} \tag{2.5}$$

ở đây S_α^T *đã được cho trong Bổ đề 2.1.*

2.3. TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM

Nhằm nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3), chúng tôi xét không gian hàm

$$\mathcal{PC}_0 = \{u \in \mathcal{PC}([-h,+\infty);X) : \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0\}$$

với chuẩn

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|,$$

ở đây $\mathcal{PC}([-h,+\infty);X)$ được định nghĩa tương tự như $\mathcal{PC}([-h,T];X)$ với $T = +\infty$. Khi đó, $\mathcal{PC}_0$ là một không gian Banach.

Ở phần này, ta thay thế các giả thiết (**A**), (**F**), (**G**) và (**I**) bởi các giả thiết sau:

(**Aa**) *A là toán tử quạt kiểu* (ω,θ), $\omega < 0$ *và* $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$.

(**Fa**) $f(\cdot,v,w)$ *đo được với mỗi* $v \in X, w \in \mathcal{C}_h$, $f(t,\cdot,\cdot)$ *liên tục với hầu khắp* $t \in \mathbb{R}^+, f(t,0,0) = 0$, *và tồn tại* $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$, *để*

$$\|f(t,v_1,w_1) - f(t,v_2,w_2)\| \leq k(t)(\|v_1 - v_2\| + \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{C}_h}), t \in \mathbb{R}^+,$$

$\forall v_1, v_2 \in X, w_1, w_2 \in \mathcal{C}_h$.

(**Ga**) *g là một hàm liên tục thỏa mãn* $g(0) = 0$ *và tồn tại số* η *không âm sao cho*

$$\|g(w_1) - g(w_2)\|_{\mathcal{C}_h} \leq \eta \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{PC}},$$

$\forall w_1, w_2 \in \mathcal{PC}([-h,T];X)$, *với mọi* $T > 0$.

(**Ia**) *Các hàm* $I_k, k \in \Lambda$ *liên tục,* $I_k(0) = 0$ *và tồn tại dãy* $\{\mu_k\}, k \in \Lambda$ *sao cho* $\sum_{k\in\Lambda} \mu_k < +\infty$*, và*

$$\|I_k(x) - I_k(y)\| \le \mu_k \|x - y\|, \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Định lí 2.2. *Giả sử* (**Aa**), (**Fa**), (**Ga**), *và* (**Ia**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (2.1)-(2.3) *có nghiệm duy nhất* $u \in \mathcal{PC}_0$*, với điều kiện*

$$\Big(\eta + \sum_{k\in\Lambda} \mu_k\Big) S_\alpha^\infty + 2 \sup_{t\ge 0} \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| k(s) ds < 1, \tag{2.6}$$

ở đây $S_\alpha^\infty = \sup_{t\ge 0} \|S_\alpha(t)\|$.

2.4. ÁP DỤNG

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền bị chặn với biên trơn $\partial\Omega$. Xét hệ sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} L_x u(x,s) ds + k(t) \tilde{f}(x, u(x,t), u(x,t-h)), \tag{2.7}$$

$$\alpha \in (1,2), t \in \mathbb{R}^+ \backslash \{t_k, k \in \Lambda\}, x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.8}$$

$$u(x, t_k^+) = u(x, t_k) + \tilde{I}_k(x, u(x, t_k)), x \in \Omega, k \in \Lambda, \tag{2.9}$$

$$u(x,s) + \sum_{i=1}^M c_i u(x, \tau_i + s) = \varphi(s), s \in [-h, 0], x \in \Omega, \tag{2.10}$$

ở đây toán tử

$$L_x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

có tính chất

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \ge \theta |\xi|^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

với $\theta > 0$. Đặt $X = L^2(\Omega), A = L_x$ và $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Khi đó, hệ (2.7)-(2.10) là một trường hợp riêng của mô hình trừu tượng (2.1)-(2.3) với

$$f(t,v,w)(x) = k(t)\tilde{f}(x, v(x), w(x,-h)), v \in X, w \in C([-h,0]; X),$$
$$I_k(v)(x) = \tilde{I}_k(x, v(x)), v \in X,$$
$$g(u)(s)(x) = \sum_{i=1}^M c_i u(x, \tau_i + s), u \in \mathcal{PC}([-h, +\infty); X).$$

Ta biết rằng, A là một toán tử quạt và nó sinh ra một nửa nhóm giải tích trong X. Hơn nữa, có thể kiểm tra được A là một toán tử quạt kiểu $(\lambda_1, 0)$ ở đây $\lambda_1 < 0$ là giá trị riêng đầu tiên của A.

Giả sử rằng $k \in L^1(\mathbb{R})$ và $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sao cho

$$|\tilde{f}(x, y_1, z_1) - \tilde{f}(x, y_2, z_2)| \le \kappa(x)(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), \kappa \in X,$$

$\forall x \in \Omega, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\|f(t, v_1, w_1) - f(t, v_2, w_2)\| &\leq k(t)\|\kappa\|(\|v_1 - v_2\| \\ &\quad + \|w_1(\cdot, -h) - w_2(\cdot, -h)\|) \\ &\leq k(t)\|\kappa\|(\|v_1 - v_2\| + \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{C}_h}),\end{aligned}$$

$\forall v_1, v_2 \in X, w_1, w_2 \in \mathcal{C}_h$.

Cho $\tilde{I}_k : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k \in \Lambda$ là hàm thỏa mãn

$$|\tilde{I}_k(x, y_1) - \tilde{I}_k(x, y_2)| \leq \ell_k(x)|y_1 - y_2|, \ell_k \in X,$$

$\forall x \in \Omega, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\|I_k(v_1) - I_k(v_2)\| \leq \|\ell_k\| \, \|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in X.$$

Đối với hàm không cục bộ g, rõ ràng

$$\|g(u_1) - g(u_2)\|_{\mathcal{C}_h} \leq \Big(\sum_{i=1}^{M} c_i\Big)\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{P}C},$$

với mọi $u_1, u_2 \in \mathcal{PC}([-h, T]; X), \forall T > 0$.

Dưới các thiết lập trên, áp dụng Định lí 2.2, ta thấy bài toán (2.7)-(2.10) có duy nhất nghiệm tích phân trên $\mathcal{PC}_0$, với điều kiện

$$\Big(\sum_{i=1}^{M} c_i + \sum_{k \in \Lambda} \|\ell_k\|\Big) S_\alpha^\infty + 2||\kappa|| \sup_{t \geq 0} \int_0^t \|S_\alpha(t - s)\| k(s) ds < 1.$$

Chương 3

TÍNH ỔN ĐỊNH YẾU CỦA NGHIỆM BAO HÀM THỨC VI PHÂN DẠNG TÁN XẠ-SÓNG VỚI TRỄ VÔ HẠN

Chương này nghiên cứu bài toán Cauchy với bao hàm thức vi tích phân dạng tán xạ-sóng chứa trễ vô hạn. Dựa trên dáng điệu của toán tử giải thức sinh bởi phần tuyến tính, chúng tôi thiết lập các ước lượng cho nghiệm của bài toán. Kết quả về tính ổn định yếu của nghiệm không, được chứng minh trong trường hợp toán tử giải thức ổn định tiệm cận.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét bài toán

$$u'(t) \in \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + F(t, u_t), t > 0, \tag{3.1}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{3.2}$$

trong đó hàm chưa biết u nhận giá trị trong không gian Banach $(X, \|\cdot\|)$, A là toán tử tuyến tính đóng và không bị chặn, F là một ánh xạ đa trị xác định trên $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ là không gian pha được định nghĩa trong Chương 1. Ở đây $\alpha \in (1, 2)$ và u_t là quá khứ của hàm trạng thái cho tới thời điểm t, nghĩa là $u_t(s) = u(t + s), s \leq 0$.

3.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM BỊ CHẶN MŨ

Giả sử $g : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty)$ là một hàm liên tục và không giảm. Trong mục này, ta giả thiết:

($\mathbf{A}^\sharp$) A là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $\omega \geq 0$ và $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, sao cho α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn.

($\mathbf{B}^\sharp$) $\mathcal{B}$ là không gian pha trong Chương 1, với K và $\frac{M}{g}$ là các hàm bị chặn đều.

($\mathbf{F}^\sharp$) Ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ thỏa mãn:

(1) với $\psi \in \mathcal{B}$ ánh xạ đa trị $F(\cdot, \psi) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{K}v(X)$ có một hàm chọn đo được mạnh địa phương, nghĩa là với mỗi $T > 0$ có thể tìm được một hàm đo được mạnh $f : [0, T] \to X$ sao cho $f(t) \in F(t, \psi)$ với hầu khắp $t \in [0, T]$;

(2) với hầu khắp t $\in \mathbb{R}^+$, ánh xạ đa trị $F(t, \cdot) : \mathcal{B} \to Kv(X)$ là nửa liên tục trên;

(3) tồn tại các hàm không âm m, p sao cho $m, \frac{p}{g} \in L^1(\mathbb{R}^+)$, và với mọi $\psi \in \mathcal{B}$, ta có

$$\|F(t, \psi)\| := \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(t, \psi)\} \leq m(t)|\psi|_{\mathcal{B}} + p(t)$$

với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$;

(4) tồn tại hàm $k \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ sao cho, với mọi tập bị chặn $D \subset \mathcal{B}$ ta có $\chi(F(t,D)) \leq k(t)\sup_{s\leq 0}\chi(D(s))$ với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$.

Xét không gian hàm sau

$$C_g(\mathbb{R}^+;X) = \{u \in C([0,\infty);X) : \lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{g(t)} = 0\}, \tag{3.3}$$

với chuẩn

$$\|u\|_g = \sup_{t\geq 0}\frac{\|u(t)\|}{g(t)}.$$

Dễ thấy rằng $C_g(\mathbb{R}^+;X)$ là một không gian Banach. Bây giờ ta định nghĩa một độ đo không compact trên không gian này. Sử dụng toán tử $\pi_T : C_g(\mathbb{R}^+;X) \to C([0,T];X)$ định nghĩa bởi $\pi_T(u) = u|_{[0,T]}$. Cho Ω là một tập bị chặn trong $C_g(\mathbb{R}^+;X)$. Đặt

$$\chi_\infty(\Omega) = \sup_{T>0}\omega_T(\pi_T(\Omega)) + \sup_{T>0}\mathrm{mod}_T(\pi_T(\Omega)), \tag{3.4}$$

$$d_\infty(\Omega) = \lim_{T\to+\infty}\sup_{u\in\Omega}\sup_{t\geq T}\frac{\|u(t)\|}{g(t)}, \tag{3.5}$$

$$\chi^*(\Omega) = \chi_\infty(\Omega) + d_\infty(\Omega), \tag{3.6}$$

ở đó ω_T và mod_T được cho trong Chương 1. Bổ đề sau đưa ra một điều kiện đủ cho tính compact của một tập bị chặn trong $C_g(\mathbb{R}^+;X)$.

Bổ đề 3.1. *Cho $\Omega \subset C_g(\mathbb{R}^+;X)$ là một tập bị chặn sao cho $\chi^*(\Omega) = 0$. Khi đó, Ω là compact tương đối trong $C_g(\mathbb{R}^+;X)$.*

Trong phần này, ta xét không gian $C_g(\mathbb{R}^+;X)$ với $g(t) = e^{\beta t}$ và $\beta > \omega^{\frac{1}{\alpha}}$.

Với $\varphi \in \mathcal{B}$, ta định nghĩa không gian

$$\mathbf{C}_{g,\varphi} = \left\{u \in C_g(\mathbb{R}^+;X) : u(0) = \varphi(0)\right\}.$$

Ta có, $\mathbf{C}_{g,\varphi}$ là một không gian con đóng của $C_g(\mathbb{R}^+;X)$.

Nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2) được định nghĩa, như sau.

Định nghĩa 3.1. Cho trước $\varphi \in \mathcal{B}$. Hàm liên tục $u : \mathbb{R} \to X$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (3.1)-(3.2), nếu tồn tại $f \in \mathcal{P}_F(u|_{\mathbb{R}^+})$, sao cho

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \leq 0, \\ S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, & t > 0. \end{cases}$$

Xét toán tử đa trị

$$\mathcal{F} : \mathbf{C}_{g,\varphi} \to \mathcal{P}(\mathbf{C}_{g,\varphi}),$$
$$\mathcal{F}(v)(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \left\{\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F(v)\right\} \tag{3.7}$$

Rõ ràng rằng nếu v là một điểm bất động của $\mathcal{F}$ thì $v[\varphi]$ là một nghiệm tích phân của (3.1)-(3.2). Ta gọi $\mathcal{F}$ là toán tử nghiệm của (3.1)-(3.2).

Kết quả chính của phần này được trình bày trong định lí sau.

Định lí 3.1. *Nếu các giả thiết* $(\mathbf{A}^\sharp)$, $(\mathbf{B}^\sharp)$ *và* $(\mathbf{F}^\sharp)$ *thỏa mãn và*

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t \frac{\|S_\alpha(t-s)\|}{g(t-s)}K(s)m(s)ds < 1. \tag{3.8}$$

Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) *có ít nhất một nghiệm tích phân thỏa mãn* $\dfrac{\|u(t)\|}{g(t)} = o(1)$ *khi* $t \to +\infty$,

3.3. KẾT QUẢ VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH YẾU

Trong mục này, xét trường hợp A là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $\omega < 0$ và $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, nghĩa là α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ là ổn định tiệm cận.

Ta thấy rằng, bằng cách chọn $g \equiv 1$ và tiến hành tương tự như phần trước, ta có thể chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2) và suy ra tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm không. Cụ thể là, ta xét toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ trên không gian

$$BC_{0,\varphi} = \{v \in C([0,\infty); X) : v(0) = \varphi(0),\ \lim_{t\to+\infty}\|v(t)\| = 0\},$$

với chuẩn

$$\|v\|_\infty = \sup_{t\geq 0}\|v(t)\|.$$

Trong tình huống này, các giả thiết $(\mathbf{A}^\sharp)$, $(\mathbf{B}^\sharp)$ và $(\mathbf{F}^\sharp)$ được thay thế bởi các giả thiết sau.

$(\mathbf{A}_a^\sharp)$ A là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $\omega < 0$ và $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, sao cho α-giải thức $S_\alpha(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn.

$(\mathbf{B}_a^\sharp)$ Không gian pha $\mathcal{B}$ cho trong Chương 1, với hàm K bị chặn đều và M thỏa mãn $M(t) = o(1)$ khi $t \to \infty$.

$(\mathbf{F}_a^\sharp)$ Ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ thỏa mãn:

(1) với $\psi \in \mathcal{B}$ ánh xạ đa trị $F(\cdot, \psi) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{K}v(X)$ có một hàm chọn đo được mạnh địa phương, nghĩa là với mỗi $T > 0$ ta có thể tìm được một hàm đo được mạnh $f : [0,T] \to X$, sao cho $f(t) \in F(t,\psi)$ với hầu khắp $t \in [0,T]$;

(2) với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$ ánh xạ đa trị $F(t,\cdot) : \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ là nửa liên tục trên trên $\mathcal{B}$;

(3) tồn tại hàm $m \in L^1(\mathbb{R}^+)$, sao cho với mọi $\psi \in \mathcal{B}$, ta có

$$\|F(t,\psi)\| := \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(t,\psi)\} \leq m(t)|\psi|_{\mathcal{B}},$$

với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$;

(4) tồn tại hàm $k \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, sao cho với mọi tập bị chặn $D \subset \mathcal{B}$, ta có $\chi(F(t,D)) \leq k(t)\sup_{s\leq 0}\chi(D(s))$ với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$.

Định lí sau là một hệ quả của Định lí 3.1.

Định lí 3.2. *Giả sử các giả thiết* $(\mathbf{A}_a^\sharp)$, $(\mathbf{B}_a^\sharp)$ *và* $(\mathbf{F}_a^\sharp)$ *thỏa mãn. Với điều kiện*

$$\Lambda_\infty = \sup_{t\geq 0}\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|K(s)m(s)ds < 1, \tag{3.9}$$

thì nghiệm không của bài toán (3.1)-(3.2) *là ổn định tiệm cận yếu.*

3.4. ÁP DỤNG

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên trơn $\partial\Omega$. Xét phương trình đạo hàm riêng sau

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta_x u(s,x)ds + f(t,x), t > 0, x \in \Omega, \tag{3.10}$$

ở đó $\alpha \in (1,2)$, hàm u thỏa mãn điều kiện biên

$$u(t,x) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \tag{3.11}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(t,x) = \varphi(t,x), x \in \Omega, t \leq 0; \tag{3.12}$$

hàm f ràng buộc bởi

$$f(t,x) \in b(t,x)\int_{-\infty}^0 \int_\Omega \nu(\theta,y)\big[f_1(u(t+\theta,y)), f_2(u(t+\theta,y))\big]dyd\theta, \tag{3.13}$$

ở đây $[f_1, f_2] = \{\tau f_1 + (1-\tau)f_2 : \tau \in [0,1]\}$.

Xét $A = \Delta$ với $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, khi đó tập giải của A, $\rho(A) \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, -\lambda_1]$, ở đó $\lambda_1 = \inf\{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} : \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$. Vậy A là toán tử quạt kiểu $(-\lambda_1, \theta)$ với $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ bất kỳ.

Cho $X = L^2(\Omega)$. Ta thấy rằng $S_\alpha(\cdot)$ khả vi trên $(0, +\infty)$ và

$$\left\|\frac{d}{dt}S_\alpha(t)u_0\right\| \leq C_\alpha t^{-1}\|u_0\|,\ t > 0,$$

với C_α là một hằng số dương. Đặc biệt, $S_\alpha(\cdot)$ là liên tục theo chuẩn. Vậy giả thiết $(\mathbf{A}_a^\sharp)$ được đáp ứng.

Xét không gian pha $\mathcal{B} = CL_g^2$ với $g(\theta) = e^{h\theta}$, ở đây nửa chuẩn trong $\mathcal{B}$ được cho bởi

$$|w|_{\mathcal{B}} = \sup_{-r\leq\theta\leq 0}\|w(\theta)\|_X + \left(\int_{-\infty}^{-r} e^{h\theta}\|w(\theta)\|_X^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}},$$

với $r = -\frac{1}{h}\ln(1-h)$. Ta có

$$K(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq r, \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{e^{-hr} - e^{-ht}}, & t > r; \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} \max\left\{e^{-\frac{1}{2}ht}, 1 + \sqrt{\frac{e^{-hr}}{h}(1-e^{-ht})}\right\}, & 0 \leq t \leq r, \\ e^{-\frac{1}{2}ht}, & t > r. \end{cases}$$

Ta thấy rằng $K(t) = O(1), M(t) = o(1)$ khi $t \to +\infty$, và do đó $(\mathbf{B}_a^\sharp)$ thỏa mãn.

Ta sẽ chỉ ra rằng hệ (3.10)-(3.13) là ổn định tiệm cận yếu với một thiết lập thích hợp đối với phần phi tuyến. Cụ thể, giử sử rằng

(N1) $b \in L^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$;

(N2) $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là liên tục và thỏa mãn

$$|f_i(z)| \leq C_f|z|, \forall z \in \mathbb{R},$$

với $C_f > 0$ nào đó;

(N3) $\nu : (-\infty, 0] \times \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, sao cho

$$|\nu(\theta, y)| \leq C_\nu e^{h\theta}, \forall y \in \Omega, \theta \leq 0,$$

ở đây $h \in (0, 1)$ và $C_\nu > 0$.

Cho $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ là ánh xạ đa trị, định nghĩa bởi

$$F(t, w)(x) = b(t, x) \int_{-\infty}^{0} \int_{\Omega} \nu(\theta, y) \big[f_1(w(\theta, y)), f_2(w(\theta, y))\big] dy d\theta.$$

Khi đó ta thấy rằng, với mỗi $\tau \in [0, 1]$ hàm số

$$f(t, x) = b(t, x) \int_{-\infty}^{0} \int_{\Omega} \nu(\theta, y) \big[\tau f_1(w(\theta, y)) + (1 - \tau) f_2(w(\theta, y))\big] dy d\theta$$

là một hàm chọn khả tích của $F(t, w)$. Giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(1)$ được thỏa mãn.

Bây giờ, với mỗi tập bị chặn $W \subset \mathcal{B}$, $F(t, W) \subset \text{span}\{b(t, \cdot)\}$, là không gian con một chiều của $L^2(\Omega)$. Thêm nữa, nhờ (N2), $F(t, W)$ cũng là tập bị chặn và compact tương đối. Do đó

$$\chi(F(t, W)) = 0,$$

và giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(4)$ thỏa mãn với $k = 0$. Đặc biệt, $F(t, w)$ là compact tương đối với mỗi $w \in \mathcal{B}$. Nhờ tính liên tục của f_1, f_2 và Định lý hội tụ trội Lebesgue, ta có thể kiểm tra tính đóng của $F(t, \cdot)$. Do đó, $F(t, \cdot)$ có giá trị compact và nửa liên tục trên. Giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(2)$ được thỏa mãn.

Đối với giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(3)$, ta có ước lượng sau

$$\begin{aligned} \|F(t, w)\|^2 &\leq C_\nu^2 C_f^2 \|b(t, \cdot)\|^2 \left(\int_{-\infty}^{0} e^{h\theta} \int_{\Omega} |w(\theta, y)| dy d\theta \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{h} C_\nu^2 C_f^2 \mu(\Omega) \|b(t, \cdot)\|^2 |w|_{\mathcal{B}}^2, \end{aligned}$$

nhờ bất đẳng thức Hölder và $r = -\frac{1}{h} \ln(1 - h)$, ở đây $\mu(\Omega)$ là độ đo Lebesgue của Ω. Khi đó

$$\|F(t, w)\| \leq \frac{1}{\sqrt{h}} C_\nu C_f \sqrt{\mu(\Omega)} \|b(t, \cdot)\| |w|_{\mathcal{B}}.$$

Như vậy, giả thiết $(\mathbf{F}_a^\sharp)(3)$ được thỏa mãn với $m(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} C_\nu C_f \sqrt{\mu(\Omega)} \|b(t, \cdot)\|$.

Cuối cùng, nếu ta giả sử thêm rằng $b(t, x) = b_1(t) b_2(x)$ với $b_1 \in L^1(\mathbb{R}^+), b_2 \in L^2(\Omega)$ thì

$$\|b(t, \cdot)\| = b_1(t) \|b_2\|,$$

và ta có thể kiểm tra điều kiện (3.9) như sau

$$\Lambda_\infty \leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t \frac{C_0 K_\infty \|b_2\| b_1(s)}{1 + \lambda_1 (t - s)^\alpha} ds \leq C_0 K_\infty \|b_2\| \|b_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)},$$

ở đó $C_0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \hat{C} C_\nu C_f \sqrt{\mu(\Omega)}$. Do đó, (3.9) thỏa mãn với $\|b_2\| \|b_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$ nhỏ.

Chương 4

TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH SÓNG BẬC PHÂN SỐ CÓ TRỌNG

Trong chương này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm, đối với phương trình sóng phân thứ có trọng, nửa tuyến tính với toán tử quạt và phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính. Vấn đề nêu trên được nghiên cứu dựa trên lý thuyết về α-giải thức, định lí điểm bất động cho ánh xạ nén, và các ước lượng cục bộ của nghiệm. Cuối cùng là một ứng dụng cho một lớp phương trình đạo hàm riêng cụ thể.

Nội dung của chương này dựa trên các bài viết số [3](dạng tiền ấn phẩm) trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach. Xét bài toán sau

$$D^{\alpha,\sigma}u(t) = Au(t) + f(t, u_t),\ t \in [0, T], \tag{4.1}$$

$$u(s) = \varphi(s), s \in [-h, 0], \tag{4.2}$$

$$u'(0) = y, \tag{4.3}$$

ở đây $\alpha \in (1, 2), \sigma > 0$, $D^{\alpha,\sigma}$ là đạo hàm phân thứ có trọng với bậc α theo nghĩa Caputo, hàm trạng thái u nhận giá trị trong X với trễ $u_t \in C([-h, 0]; X)$ xác định bởi $u_t(s) = u(t + s), s \in [-h, 0]$, A là một toán tử tuyến tính đóng trên X và hàm phi tuyến f được định nghĩa trên $[0, T] \times C([-h, 0]; X)$.

4.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán (4.1)-(4.3) trong trường hợp phần phi tuyến có tăng trưởng dưới tuyến tính, chúng tôi sử dụng các giả thiết sau:

($\mathbf{A}^*$) A là toán tử quạt kiểu $(0, \theta)$ với góc $\theta \in [0, (1 - \frac{\alpha}{2})\pi)$ và $0 \in \rho(A)$.

($\mathbf{F}^*$) Ánh xạ $f : [0, T] \times \mathcal{C}_h \to X$ liên tục và thỏa mãn:

(1) điều kiện tăng trưởng

$$\|f(t, v)\| \le a + b\|v\|_{\mathcal{C}_h}, \forall v \in \mathcal{C}_h,\ \text{hầu khắp } t \in [0, T],$$

với a, b là các số không âm;

(2) nếu $(\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$, không compact thì với mọi tập bị chặn $\Omega \subset \mathcal{C}_h$, ta có

$$\chi(f(t, \Omega)) \le k(t) \sup_{\theta \in [-h,0]} \chi(\Omega(\theta)),$$

ở đây $k \in L^1(0, T)$ là hàm không âm.

Chúng tôi đưa ra định nghĩa nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) như sau.

Định nghĩa 4.1. Cho trước $(\varphi, y) \in \mathcal{C}_h \times X$. Hàm $u \in C([-h, T]; X)$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) trên đoạn $[-h, T]$ nếu và chỉ nếu $u(t) = \varphi(t)$ khi $t \in [-h, 0]$ và

$$\begin{aligned} u(t) = e^{-\sigma t} S_\alpha(t)\varphi(0) + e^{-\sigma t}(1 * S_\alpha)(t)(y + \sigma\varphi(0))ds, \\ + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s) f(s, u_s) ds, \end{aligned}$$

khi $t \in [0, T]$.

Sau đây, ta xét toán tử $\mathcal{F} : C_\varphi \to C_\varphi$ cho bởi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v)(t) = e^{-\sigma t} S_\alpha(t)\varphi(0) + e^{-\sigma t}(1 * S_\alpha)(t)(y + \sigma\varphi(0)) \\ + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t-s) f(s, v_s) ds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dễ thấy rằng nếu v là một điểm bất động của $\mathcal{F}$ thì $v[\varphi]$ là một nghiệm tích phân của (4.1)-(4.3).

Định lí sau đây là kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán khi phần phi tuyến có tăng trưởng dưới tuyến tính.

Định lí 4.1. *Với các giả thiết* $(\mathbf{A}^*)$ *và* $(\mathbf{F}^*)$. *Tập nghiệm của bài toán* (4.1)-(4.3) *là khác rỗng.*

Bây giờ, để xét trường hợp f có thể tăng trưởng trên tuyến tính, ta thay điều kiện $(\mathbf{F}^*)$ bởi điều kiện sau.

$(\mathbf{F}_a^*)$ Hàm phi tuyến $f : [0, T] \times \mathcal{C}_h \to X$ liên tục và thỏa mãn $(\mathbf{F})(2)$. Hơn nữa, tồn tại hàm $m \in C([0, T]; \mathbb{R}^+)$ và hàm không giảm $\Psi \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, sao cho

$$\|f(t, v)\| \le m(t)\Psi(\|v\|_{\mathcal{C}_h}), \ \forall v \in \mathcal{C}_h.$$

Đặt $C_\sigma = \max\{\sigma^{-1}e^{-1}, Te^{-\sigma T}\}$, và kí hiệu $|\cdot|_\infty$ là chuẩn sup trong $C([0, T]; \mathbb{R})$. Ta có kết quả tiếp theo về sự tồn tại nghiệm khi phần phi tuyến có thể tăng trưởng trên tuyến tính.

Định lí 4.2. *Giả sử rằng các giả thiết* $(\mathbf{A}^*)$ *và* $(\mathbf{F}_a^*)$ *thỏa mãn. Nếu tồn tại* $R > 0$, *sao cho*

$$M\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + MC_\sigma(\|y\| + \sigma\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h}) + C_\alpha\Gamma(\alpha)|I_0^{\alpha,\sigma} m|_\infty \Psi(\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + R) \le R, \tag{4.5}$$

thì bài toán (4.1)-(4.3) *có ít nhất một nghiệm tích phân.*

4.3. TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN

Trong phần này, chúng tôi chứng minh kết quả chính của chương đó là tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm không. Kí hiệu $\mathbb{S}(\xi)$ là tập nghiệm của bài toán (4.1)-(4.3) với dữ kiện ban đầu $\xi = (\varphi, y)$. Chúng tôi sử dụng khái niệm hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm đối với phương trình (4.1) như sau.

Định nghĩa 4.2. (*Tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn*). Cho $\xi_0 = (\varphi_0, y_0) \in \mathcal{C}_h \times X$. Nghiệm $u \in \mathbb{S}(\xi_0)$ được gọi là

(i) *hút* trên $[0,T]$ nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\| < \|\varphi - \varphi_0\|_{\mathcal{C}_h} + \|y - y_0\|$$

với mọi $\xi = (\varphi, y) \in B_\eta(\xi_0) \setminus \{\xi_0\}$ và $v \in \mathbb{S}(\xi)$, ở đây $B_\eta(\xi_0)$ là hình cầu đóng trong $\mathcal{C}_h \times X$ có tâm tại ξ_0 bán kính η.

(ii) *hút mũ* trên $[0,T]$ nếu

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(\xi_0)} \sup_{v \in \mathbb{S}(\xi)} \left(\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\| \right) < 1.$$

Hiển nhiên, từ tính hút mũ suy ra tính hút. Chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho tính hút mũ trong bổ đề sau.

Bổ đề 4.1. *Cho trước $\xi_0 = (\varphi_0, y_0) \in \mathcal{C}_h \times X$. Nghiệm $u \in \mathbb{S}(\xi_0)$ là hút mũ trên $[0,T]$, nếu*

$$\limsup_{\|\xi\| \to 0} \sup_{v \in \mathbb{S}(\xi + \xi_0)} \frac{\|v_T - u_T\|_{\mathcal{C}_h} + \|v'(T) - u'(T)\|}{\|\xi\|} < 1. \tag{4.6}$$

Bổ đề 4.2. *Nếu giả thiết $(\mathbf{A}^*)$ và $(\mathbf{F}_a^*)$ thỏa mãn với Ψ Lipschitz địa phương và $\Psi(r) = \gamma r + o(r)$ khi $r \to 0$, ở đây γ là một số không âm, thì*

$$\lim_{\xi = (\varphi, y) \to 0} \sup_{u \in \mathbb{S}(\xi)} \|u_t\|_{\mathcal{C}_h} = 0, \forall t \in [0,T].$$

Trước hết chúng tôi nghiên cứu tính hút mũ của nghiệm không đối với phương trình (4.1).

Định lí 4.3. *Giả thiết như trong Bổ đề 4.2. Khi đó nghiệm không của (4.1) là hút mũ trên $[0,T]$, nếu bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\Phi(T) + \Sigma(T) < 1, \tag{4.7}$$

trong đó

$$\Phi(t) = M \max\{t, 2 + \sigma t\} e^{-\sigma(t-h)} E_\alpha \left(t^\alpha \gamma |m|_\infty e^{\sigma h} C_\alpha \Gamma(\alpha) \right),$$

và

$$\Sigma(t) = e^{-\sigma t} \max\left\{ C t^{-1} + M \sigma^2 t, M(1 + \sigma t) \right\} + \gamma C_\alpha \left(\int_0^t \left[\sigma (t-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-2} \right] e^{-\sigma(t-s)} \Phi(s) ds \right).$$

Để chứng minh tính hút của nghiệm khác không, chúng ta cần giả thiết sau đây đối với phần phi tuyến.

$(\mathbf{F}_b^*)$ Hàm $f : [0,T] \times \mathcal{C}_h \to X$ liên tục, thỏa mãn $(\mathbf{F}^*)(2)$. Hơn nữa, tồn tại hàm $m \in C([0,T]; \mathbb{R}^+)$ và hàm không giảm, Lipschitz địa phương $\Psi \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ sao cho $\Psi(r) = \gamma r + o(r)$ khi $r \to 0$ với $\gamma \geq 0$, và

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \leq m(t) \Psi(\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{C}_h}), \ \forall v_1, v_2 \in \mathcal{C}_h.$$

Định lí 4.4. *Nếu các giả thiết $(\mathbf{A}^*)$, $(\mathbf{F}_b^*)$ thỏa mãn và*

$$\Phi(T) + \Sigma(T) < 1,$$

trong đó Φ, Σ là các hàm đã cho trong Định lí 4.3. Khi đó, mọi nghiệm của phương trình (4.1) hút mũ trên $[0,T]$.

4.4. ÁP DỤNG

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên trơn $\partial\Omega$. Xét bài toán sau

$$\begin{aligned}
\partial_t^{\alpha,\sigma} u(t,x) &= \Delta_x u(t,x) \\
&\quad + \tilde{f}\left(t, u(t,x), \int_\Omega k(y)u(t-h,y)dy\right),\ x \in \Omega, t \in [0,T], && (4.8)\\
u(t,x) &= 0,\ x \in \partial\Omega, t > 0, && (4.9)\\
u(s,x) &= \varphi(s,x), x \in \Omega, s \in [-h,0], && (4.10)\\
\partial_t u(0,x) &= y(x), x \in \Omega, && (4.11)
\end{aligned}$$

trong đó $\alpha \in (1,2), \sigma > 0$, $\partial_t^{\alpha,\sigma}$ là đạo hàm phân thứ có trọng theo nghĩa Caputo với bậc α, $\tilde{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và $k \in L^2(\Omega)$.

Lấy $X = L^2(\Omega)$ và $A = \Delta$ với $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Khi đó A là toán tử sinh của nửa nhóm compact $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Phổ của $-A$ là tập các giá trị riêng của $-A$, gồm các số dương, dễ thấy $0 \in \rho(A)$ và A là một toán tử quạt kiểu $(0,\theta)$ với $\theta = 0$. Vì vậy, A sinh ra α-giải thức compact $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$.

Về phần phi tuyến $\tilde{f}$, chúng tôi giả thiết thêm rằng

$$|\tilde{f}(t,y,z)| \leq m(t)|y||z|^p, \forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2, \tag{4.12}$$

với $m \in C([0,T];\mathbb{R}^+),\ p > 0$.

Đặt $\mathcal{C}_h = C([-h,0];L^2(\Omega))$. Xét hàm số $f : [0,T] \times \mathcal{C}_h \to L^2(\Omega)$ xác định như sau

$$f(t,\phi)(x) = \tilde{f}\left(t, \phi(0,x), \int_\Omega k(y)\phi(-h,y)dy\right).$$

Rõ ràng, bài toán (4.8)-(4.11) là một trường hợp riêng của bài toán (4.1)-(4.2).

Sử dụng (4.12), ta có

$$\begin{aligned}
|f(t,\phi)(x)| &\leq m(t)|\phi(0,x)| \left(\int_\Omega |k(y)||\phi(-\rho(0),y)|dy\right)^p \\
&\leq m(t)|\phi(0,x)|\|k\|_X^p \|\phi(-\rho(0),\cdot)\|_X^p,
\end{aligned}$$

do bất đẳng thức Hölder. Vì vậy

$$\begin{aligned}
\|f(t,\phi)\| &\leq m(t)\|k\|_X^p \|\phi(0,\cdot)\|_X \|\phi(-\rho(0),\cdot)\|_X^p \\
&\leq m(t)\|k\|_X^p \sup_{s\in[-h,0]} \|\phi(s,\cdot)\|_X^{p+1} \\
&= m(t)\|k\|_X^p \|\phi\|_{\mathcal{C}_h}^{p+1}.
\end{aligned}$$

Có thể kiểm tra rằng f liên tục, nhờ vào tính liên tục của $\tilde{f}$ và định lí hội tụ trội Lebesgue. Do đó, f thỏa mãn $(\mathbf{F}_a^*)$ với $\Psi(r) = \|k\|_X^p r^{p+1} = o(r)$ khi $r \to 0$. Sử dụng Định lí 4.3, ta suy ra nghiệm không của (4.8) là hút mũ trên $[0,T]$, nếu thỏa mãn

$$M \max\{T, 2+\sigma T\}e^{\sigma h} + \max\left\{CT^{-1} + M\sigma^2 T, M(1+\sigma T)\right\} < e^{\sigma T},$$

trong đó $M = \sup_{t\in[0,T]} \|S_\alpha(t)\|$ và $C = \sup_{t\in[0,T]} \|tA(g_{\alpha-1} * S_\alpha)(t)\|$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án, chúng tôi trình bày một số kết quả về dáng điệu nghiệm của phương trình/bao hàm thức vi tích phân phân thứ dạng tán xạ-sóng chứa trễ trong không gian Banach tổng quát. Các kết quả đạt được bao gồm:

- Đối với lớp phương trình vi tích phân phân thứ có trễ hữu hạn: Chứng minh được tính giải được và tính ổn định tiệm cận của nghiệm.
- Đối với lớp bao hàm thức vi tích phân phân thứ có trễ vô hạn: Chứng minh được sự tồn tại nghiệm tích phân và tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm.
- Với phương trình vi phân phân thứ có trọng: Chứng minh được sự tồn tại nghiệm trên đoạn compact với phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính, đưa ra khái niệm tính hút, hút mũ trên khoảng hữu hạn cho trường hợp có trễ hữu hạn, nêu ra một điều kiện đủ cho tính hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn và sử dụng nó để thu được tính hút mũ của của nghiệm.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu dáng điệu nghiệm các phương trình và bao hàm thức vi phân phân thứ trong luận án khi không có các giả thiết về độ đo không compact.
- Nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định (thời gian hữu hạn hoặc Lyapunov) của nghiệm cho các hệ vi phân ngẫu nhiên phân thứ.
- Nghiên cứu các vấn đề liên quan như tính chính qui của nghiệm, cấu trúc của tập nghiệm đối với các hệ vi phân phân thứ.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. N.M. Chuong, T.D. Ke, N.N. Quan, *Stability for a class of fractional partial integro-differential equations*, J. Integral Equations Appl. 26 (2014), 145-170. (SCIE).
2. N.T. Anh, T.D. Ke, N.N. Quan. *Weak stability for integro-differential inclusions of diffusion-wave type involving infinite delays*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 21 (2016), 3637-3654.(SCI).
3. T.D. Ke, N.N. Quan. Finite-time attractivity for semilinear tempered fractional wave equations, *submitted*.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

1) Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
2) Hội thảo cho Nghiên cứu sinh, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2018.